Caractères de représentations de niveau 0

J.-L Waldspurger

Caractères de représentations de niveau 0

J.-L. Waldspurger

1er février 2016

Introduction

Soient F un corps local non-archimédien et G un groupe algébrique connexe défini sur F. Notons G_{AD} le groupe adjoint. Bruhat et Tits ont défini l'immeuble $Imm(G_{AD})$ de ce groupe. Il est muni d'une décomposition en facettes et d'une action de $G(F)$ qui respecte cette décomposition. A toute facette $\mathcal{F}$ sont associés plusieurs sous-groupes ouverts de $G(F)$: le groupe $K_{\mathcal{F}}^{\dagger}$ des éléments de $G(F)$ qui conservent $\mathcal{F}$; le sous-groupe parahorique $K_{\mathcal{F}}^0$ défini par Bruhat et Tits, qui est un sous-groupe ouvert compact de $K_{\mathcal{F}}$; un certain sous-groupe pro-p-unipotent $K_{\mathcal{F}}^+$ de $K_{\mathcal{F}}^0$ qui est distingué dans $K_{\mathcal{F}}^{\dagger}$. Le quotient $\mathcal{N}(\mathcal{F}) = K_{\mathcal{F}}^{\dagger}/K_{\mathcal{F}}^0$ est abélien et l'application de Kottwitz l'identifie à un sous-groupe d'un certain groupe abélien $\mathcal{N}$ indépendant de $\mathcal{F}$. Pour $\nu \in \mathcal{N}(\mathcal{F})$, notons $K_{\mathcal{F}}^{\nu}$ l'image réciproque de ν dans $K_{\mathcal{F}}$. L'action sur l'immeuble d'un élément $k \in K_{\mathcal{F}}^0$ conserve $\mathcal{F}$ point par point. Si $\nu \neq 0$, l'action sur l'immeuble d'un élément $k \in K_{\mathcal{F}}^{\nu}$ conserve $\mathcal{F}$ mais pas point par point en général. On sait que $\mathcal{F}$ s'identifie à un ouvert d'un espace vectoriel réel euclidien et qu'il existe une isométrie $\sigma_{\mathcal{F},\nu}$ de cet espace, conservant $\mathcal{F}$ et telle que tout élément $k \in K_{\mathcal{F}}^{\nu}$ agisse dans $\mathcal{F}$ par cette isométrie. On note $\mathcal{F}^{\nu}$ le sous-ensemble des points fixes de $\sigma_{\mathcal{F},\nu}$ dans $\mathcal{F}$. On note $Fac^*_{max}(G)$ l'ensemble des couples $(\mathcal{F},\nu)$ formés d'une facette $\mathcal{F}$ de $Imm(G_{AD})$ et d'un élément $\nu \in \mathcal{N}(\mathcal{F})$, tels que $\mathcal{F}^{\nu}$ est réduit à un point.

Soit π une représentation lisse de longueur finie de $G(F)$ dans un espace complexe V. Pour toute facette $\mathcal{F}$, notons $V^{K_{\mathcal{F}}^+}$ le sous-espace des invariants par $K_{\mathcal{F}}^+$. Il est de dimension finie. On dit que π est de niveau 0 si V est engendré par les sous-espaces $V^{K_{\mathcal{F}}^+}$ quand $\mathcal{F}$ décrit les facettes de l'immeuble. Supposons π de niveau 0. Pour toute facette $\mathcal{F}$, le groupe $K_{\mathcal{F}}^{\dagger}$ conserve $V^{K_{\mathcal{F}}^+}$ et cette action se quotiente en une représentation $\pi_{\mathcal{F}}$ de dimension finie du groupe $K_{\mathcal{F}}^{\dagger}/K_{\mathcal{F}}^+$. Notons $trace\,\pi_{\mathcal{F}}$ le caractère de cette représentation. On sait qu'il existe un groupe réductif $\mathbf{G}_{\mathcal{F}}$ sur $\mathbb{F}_q$ (le corps résiduel de F) tel que $K_{\mathcal{F}}^0/K_{\mathcal{F}}^+ \simeq \mathbf{G}_{\mathcal{F}}(\mathbb{F}_q)$. Pour $\nu \in \mathcal{N}(\mathcal{F})$, il existe un "espace tordu" $\mathbf{G}_{\mathcal{F}}^{\nu}$ sous $\mathbf{G}_{\mathcal{F}}$ de sorte que $\mathbf{G}_{\mathcal{F}}^{\nu}(\mathbb{F}_q) \simeq K_{\mathcal{F}}^{\nu}/K_{\mathcal{F}}^+$. En utilisant la théorie des représentations des espaces tordus, on définit pour tout ν la projection cuspidale $\phi_{\pi,\mathcal{F},\nu,cusp}$ de la restriction du caractère $trace\,\pi_{\mathcal{F}}$ à $K_{\mathcal{F}}^{\nu}/K_{\mathcal{F}}^+$. On peut considérer que c'est une fonction sur $G(F)$, à support dans $K_{\mathcal{F}}^{\nu}$ et biinvariante par $K_{\mathcal{F}}^+$. Elle est invariante par conjugaison par $K_{\mathcal{F}}^{\dagger}$. Fixons une mesure de Haar sur $G(F)$. Pour toute fonction $f \in C_c^{\infty}(G(F))$, on pose

$$\Theta^G_{\pi,cusp}(f) = \sum_{(\mathcal{F},\nu)\in Fac^*_{max}(G)} \int_{G(F)} f(g)\phi_{\pi,\mathcal{F},\nu,cusp}(g)\,dg.$$

Cette définition a un sens car on montre qu'il n'y a qu'un nombre fini de $(\mathcal{F},\nu) \in Fac^*_{max}(G)$ tels que l'intégrale ci-dessus ne soit pas nulle. Cela définit une distribution

$\Theta^G_{\pi,cusp}$ sur $G(F)$, qui est invariante par conjugaison. Pour tout sous-groupe de Levi M de G (défini sur F), notons $\mathcal{L}(M)$ l'ensemble des sous-groupes de Levi de G contenant M. Fixons un sous-groupe de Levi minimal M_{min} de G et, pour tout $M \in \mathcal{L}(M_{min})$, notons W^M le groupe de Weyl de M relatif à M_{min}. Fixons un sous-groupe parabolique P de composante de Levi M et des mesures de Haar sur $M(F)$ et sur $U_P(F)$, où U_P est le radical unipotent de P. On définit la représentation π_P de $M(F)$ dans le module de Jacquet de π relatif à P. Elle est de niveau 0. On définit la distribution $\Theta^M_{\pi_P,cusp}$ sur $M(F)$. On l'induit à $G(F)$ de la façon habituelle. C'est-à-dire, pour toute $f \in C_c^\infty(G(F))$ et tout $g \in G(F)$, notons $({}^gf)_{[P]}$ la fonction $m \mapsto \delta_P(m)^{1/2}\int_{U_P(F)} f(g^{-1}mug)\,du$ sur $M(F)$, où δ_P est le module usuel. Des mesures fixées se déduit une (pseudo-)mesure sur $P(F)\backslash G(F)$ (pseudo car elle ne s'applique pas à des fonctions sur ce quotient mais à des sections d'un certain fibré). On pose

$$ind^G_M(\Theta^M_{\pi_P,cusp})(f) = \int_{P(F)\backslash G(F)} \Theta^M_{\pi_P,cusp}(({}^gf)_{[P]})\,dg.$$

Les distributions $\Theta^M_{\pi_P,cusp}$ et $ind^G_M(\Theta^M_{\pi_P,cusp})$ dépendent du choix du sous-groupe parabolique P. Mais disons qu'un élément $g \in G(F)$ est compact modulo $Z(G)$ si l'image de g dans $G_{AD}(F)$ appartient à un sous-groupe compact de ce groupe. Alors la restriction de $\Theta^M_{\pi_P,cusp}$ aux éléments de $M(F)$ qui sont compacts modulo $Z(G)$ ne dépend pas de P et la restriction de $ind^G_M(\Theta^M_{\pi_P,cusp})$ aux éléments de $G(F)$ qui sont compacts modulo $Z(G)$ n'en dépend pas non plus.

On définit le caractère-distribution Θ_π par $\Theta_\pi(f) = trace\,\pi(f)$ pour toute $f \in C_c^\infty(G(F))$. Notre résultat principal est le suivant.

Théorème. *Soit π une représentation lisse de $G(F)$ de longueur finie et de niveau 0. Soit $f \in C_c^\infty(G(F))$, supposons que le support de f est formé d'éléments de $G(F)$ qui sont compacts modulo $Z(G)$. Alors on a l'égalité*

$$\Theta_\pi(f) = \sum_{M\in\mathcal{L}(M_{min})} |W^M||W^G|^{-1} ind^G_M(\Theta^M_{\pi_{P(M)},cusp})(f),$$

où, pour tout M, on a fixé un sous-groupe parabolique $P(M)$ de composante de Levi M.

Pour π comme ci-dessus, on sait grâce à Harish-Chandra que Θ_π est une distribution localement intégrable, associée à une fonction localement intégrable θ_π sur $G(F)$, localement constante sur les éléments semi-simples fortement réguliers. Soit $M \in \mathcal{L}(M_{min})$, notons $M(F)_{ell}$ le sous-ensemble des éléments de $M(F)$ qui sont semi-simples, fortement réguliers dans $G(F)$ et elliptiques dans $M(F)$. On note A_M le plus grand sous-tore du centre de M qui soit déployé sur F. Pour $(\mathcal{F},\nu) \in Fac^*_{max}(G)$ et $m \in M(F)_{ell}$, on définit en suivant Arthur l'intégrale orbitale pondérée $J^G_M(m, \phi_{\pi,\mathcal{F},\nu,cusp})$, modulo certains choix de mesures. Fixons un ensemble de représentants $\underline{Fac}^*_{max}(G)$ des classes de conjugaison par $G(F)$ dans $Fac^*_{max}(G)$. Le théorème ci-dessus se traduit plus concrètement par l'énoncé suivant, où D^G est l'habituel discriminant de Weyl.

Théorème. *Soit π une représentation lisse de $G(F)$ de longueur finie et de niveau 0. Soit $M \in \mathcal{L}(M_{min})$ et soit $m \in M(F)_{ell}$. Supposons que m soit compact modulo $Z(G)$. Alors on a l'égalité*

$$\theta_\pi(m) = D^G(m)^{-1/2} \sum_{L\in\mathcal{L}(M)} (-1)^{dim(A_M)-dim(A_L)}$$

$$\sum_{(\mathcal{F}_L,\nu)\in \underline{Fac}^*_{max}(L)} mes(A_L(F)\backslash K^\dagger_{\mathcal{F}_L})^{-1} J^L_M(m, \phi_{\pi_{P(L)}\mathcal{F}_L,\nu,cusp}).$$

En utilisant un résultat bien connu de Casselman, on obtient une expression plus générale pour $\theta_\pi(m)$ pour tout $m \in M(F)_{ell}$ (c'est-à-dire sans supposer de condition de compacité modulo $Z(G)$). Cf. paragraphe 18 pour l'énoncé précis.

Si on se limite aux éléments de $G(F)_{ell}$, le résultat ci-dessus coïncide avec le théorème II.4.16 de [14]. Dans le cas où π est une représentation cuspidale, Arthur a montré que le caractère-fonction θ_π était égale à l'intégrale orbitale pondérée d'un certain coefficient de π, cf. [1]. Il a obtenu une expression qui vaut plus généralement pour π de la série discrète (ou même elliptique en son sens), cf. [2] théorème 5.1. Mais il utilise alors non pas des intégrales orbitales pondérées mais leurs versions invariantes, qui sont beaucoup plus difficilement calculables. Ici, on ne suppose pas que π est de la série discrète mais on impose une condition assez sévère : π est de niveau 0.

Notre résultat s'inspire beaucoup de l'article de Courtès [8]. Disons qu'une fonction $f \in C^\infty_c(G(F))$ est de niveau 0 si elle est combinaison linéaire de fonctions f' pour lesquelles il existe une facette $\mathcal{F}'$ de sorte que f' soit biinvariante par $K^+_{\mathcal{F}'}$. Courtès a établi un théorème similaire à notre premier théorème ci-dessus pour des distributions à support dans les éléments compacts modulo $Z(G)$, que l'on restreint à des fonctions de niveau 0. En un sens, notre résultat est dual de celui de Courtès : ce sont les distributions que l'on suppose "de niveau 0" et on les restreint à des fonctions à support compact modulo $Z(G)$. Si on travaillait sur l'algèbre de Lie et non pas sur le groupe, il est probable que notre résultat se déduirait de celui de Courtès par transformation de Fourier. En fait, nos preuves reprennent assez souvent celles de Courtès. On ajoute de plus un ingrédient essentiel : la résolution de π introduite par Schneider et Stuhler, cf. [14], dans une version améliorée par Meyer et Solleveld, cf. [12]. Elle permet d'exprimer Θ_π à l'aide des fonctions $trace\,\pi_{\mathcal{F}}$. Le reste de la preuve n'est rien d'autre qu'un calcul combinatoire.

Je remercie beaucoup B. Lemaire pour diverses explications et références concernant la théorie des immeubles. Je remercie également J.-F. Dat pour m'avoir indiqué une réference très utile.

1 Notations

Soit G un groupe réductif connexe défini sur un corps k. Tous les sous-groupes algébriques de G que nous considérerons sont supposés définis sur k. On note $Z(G)$ le centre de G et A_G le plus grand sous-tore de $Z(G)$ qui est déployé sur k. On appelle sous-groupe de Levi de G une composante de Levi d'un sous-groupe parabolique de G. Pour un tel sous-groupe M, on note $\mathcal{L}(M)$, resp. $\mathcal{P}(M)$, $\mathcal{F}(M)$, l'ensemble des sous-groupes de Levi contenant M, resp. celui des sous-groupes paraboliques de G de composante de Levi M, resp. celui des sous-groupes paraboliques de G contenant M. Pour un sous-groupe parabolique P de G, on note U_P son radical unipotent. On note G_{AD} le groupe adjoint de G.

Les objets ci-dessus, ainsi que d'autres définis plus loin, dépendent du groupe G. Le cas échéant, on ajoutera un G dans leur notation pour préciser ce groupe "ambiant" : $\mathcal{L}^G(M)$ au lieu de $\mathcal{L}(M)$. Les objets analogues relatifs à un autre groupe H seront alors notés en remplaçant la lettre G par H : par exemple, si L est un sous-groupe de Levi de G et M est un sous-groupe de Levi de L, $\mathcal{L}^L(M)$ est l'ensemble des sous-groupes de Levi de L contenant M.

Un espace tordu sous G est une variété algébrique G^ν sur k munie de deux actions de G à gauche et à droite telles que, pour chacune des actions, G^ν soit un espace principal homogène. On impose que $G^\nu(k) \neq \emptyset$. Pour tout $x \in G^\nu$, il existe un unique automorphisme ad_x de G échangeant les actions de G à gauche et à droite, c'est-à-dire tel que $ad_x(g)x = xg$ pour tout $g \in G$. La restriction de ad_x à $Z(G)$ ne dépend pas de x et on impose que cet automorphisme de $Z(G)$ soit d'ordre fini. Soit P un sous-groupe parabolique de G de composante de Levi M. On note P^ν l'ensemble des $x \in G^\nu$ tels que ad_x conserve P et M^ν l'ensemble des $x \in P^\nu$ tels que $ad_x(M) = M$. Les quatre conditions suivantes sont équivalentes : $P^\nu \neq \emptyset$; $P^\nu(k) \neq \emptyset$; $M^\nu \neq \emptyset$; $M^\nu(k) \neq \emptyset$. Si elles sont vérifiées, on dit que P^ν est un sous-espace parabolique de P^ν et que M^ν est un sous-espace de Levi. Remarquons que M^ν n'est pas déterminé par M, il dépend aussi de P. Par contre, M^ν détermine M : M est l'ensemble des $g \in G$ tels que la multiplication par g, à droite ou à gauche, conserve M^ν. Dans le cas où P est un sous-groupe parabolique minimal et M est un sous-groupe de Levi minimal, les conditions précédentes sont toujours vérifiées. On généralise à ces espaces les notations introduites plus haut : $\mathcal{L}(M^\nu)$, $\mathcal{P}(M^\nu)$ et $\mathcal{F}(M^\nu)$.

Si A est un tore défini et déployé sur k, on note $X_*(A)$ le groupe des homomorphismes algébriques de $GL(1)$ dans A et $X^*(A)$ le groupe des homomorphismes algébriques de A dans $GL(1)$. En particulier, on dispose du groupe $X_*(A_G)$. On pose $\mathcal{A}_G = X_*(A_G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. La définition de $X^*(A)$ se généralise au cas où A est un sous-groupe fermé pas forcément connexe d'un tore comme ci-dessus.

2 Fonctions sur les groupes finis

Soient $\mathbf{G}$ un groupe réductif défini sur un corps fini $\mathbb{F}_q$ et $\mathbf{G}^\nu$ un espace tordu sous $\mathbf{G}$. On note $C^{inv}(\mathbf{G}^\nu)$ l'espace des fonctions de $\mathbf{G}^\nu(\mathbb{F}_q)$ dans $\mathbb{C}$ qui sont invariantes par conjugaison par $\mathbf{G}(\mathbb{F}_q)$. Soit $\mathbf{M}^\nu$ un sous-espace de Levi de $\mathbf{G}^\nu$. On définit les homomorphismes

$$res_{\mathbf{M}^\nu}^{\mathbf{G}^\nu} : C^{inv}(\mathbf{G}^\nu) \to C^{inv}(\mathbf{M}^\nu)$$
$$ind_{\mathbf{M}^\nu}^{\mathbf{G}^\nu} : C^{inv}(\mathbf{M}^\nu) \to C^{inv}(\mathbf{G}^\nu)$$

de la façon suivante. On fixe un sous-espace parabolique $\mathbf{P}^\nu \in \mathcal{P}(\mathbf{M}^\nu)$. Pour $f \in C^{inv}(\mathbf{G}^\nu)$ et $m \in \mathbf{M}^\nu(\mathbb{F}_q)$, on pose

$$res_{\mathbf{M}^\nu}^{\mathbf{G}^\nu}(f)(m) = |\mathbf{U_P}(\mathbb{F}_q)|^{-1} \sum_{u \in \mathbf{U_P}(\mathbb{F}_q)} f(mu).$$

Pour $f \in C^{inv}(\mathbf{M}^\nu)$, on définit d'abord une fonction $f[\mathbf{P}^\nu]$ sur $\mathbf{G}^\nu(\mathbb{F}_q)$. Elle est à support dans $\mathbf{P}^\nu(\mathbb{F}_q)$. Pour $m \in \mathbf{M}^\nu(\mathbb{F}_q)$ et $u \in \mathbf{U_P}(\mathbb{F}_q)$, on a $f[\mathbf{P}^\nu](mu) = f(m)$. Pour $g \in \mathbf{G}^\nu(\mathbb{F}_q)$, on pose

$$ind_{\mathbf{M}^\nu}^{\mathbf{G}^\nu}(f)(g) = |\mathbf{P}(\mathbb{F}_q)|^{-1} \sum_{x \in \mathbf{G}(\mathbb{F}_q)} f[\mathbf{P}^\nu](x^{-1}gx).$$

Il est connu que ces définitions ne dépendent pas du choix de $\mathbf{P}^\nu$. On dit qu'une fonction $f \in C^{inv}(\mathbf{G}^\nu)$ est cuspidale si et seulement si $res_{\mathbf{M}^\nu}^{\mathbf{G}^\nu}(f) = 0$ pour tout espace de Levi propre $\mathbf{M}^\nu$. On note $C^{inv}_{cusp}(\mathbf{G}^\nu)$ le sous-espace des fonctions cuspidales. Il est connu que cet espace est un supplémentaire dans $C^{inv}(\mathbf{G}^\nu)$ de la somme (non directe) sur tous les espaces de Levi propres $\mathbf{M}^\nu$ des images des homomorphismes $ind_{\mathbf{M}^\nu}^{\mathbf{G}^\nu}$, cf. [8] proposition 1.1. Cela définit une projection $C^{inv}(\mathbf{G}^\nu) \to C^{inv}_{cusp}(\mathbf{G}^\nu)$ que l'on appelle la projection cuspidale. Plus généralement, soit $\mathbf{M}^\nu$ un espace de Levi. On note $proj_{cusp,\mathbf{M}^\nu}$ la composée de $res_{\mathbf{M}^\nu}^{\mathbf{G}^\nu}$ et de la projection cuspidale $C^{inv}(\mathbf{M}^\nu) \to C^{inv}_{cusp}(\mathbf{M}^\nu)$. Si $\mathbf{M}_1^\nu$ et $\mathbf{M}_2^\nu$ sont deux espaces de Levi et si $g \in \mathbf{G}(\mathbb{F}_q)$ conjugue $\mathbf{M}_1^\nu$ en $\mathbf{M}_2^\nu$, la conjugaison par g envoie naturellement $C^{inv}_{cusp}(\mathbf{M}_1^\nu)$ sur $C^{inv}_{cusp}(\mathbf{M}_2^\nu)$. Il est clair que la composée de $proj_{cusp,\mathbf{M}_1^\nu}$ et de cet isomorphisme est égale à $proj_{cusp,\mathbf{M}_2^\nu}$. Pour tout espace de Levi $\mathbf{M}^\nu$, notons $n^{\mathbf{G}}(\mathbf{M}^\nu)$ le nombre d'éléments du quotient du groupe $Norm_{\mathbf{G}(\mathbb{F}_q)}(\mathbf{M}^\nu)/\mathbf{M}(\mathbb{F}_q)$, où $Norm_{\mathbf{G}(\mathbb{F}_q)}(\mathbf{M}^\nu)$ est le normalisateur de $\mathbf{M}^\nu$ dans $\mathbf{G}(\mathbb{F}_q)$. Fixons un ensemble de représentants $\underline{Levi}(\mathbf{G}^\nu)$ des classes de conjugaison par $\mathbf{G}(\mathbb{F}_q)$ de sous-espaces de Levi de $\mathbf{G}^\nu$. On vérifie que

(1) pour tout $f \in C^{inv}(\mathbf{G}^\nu)$, on a l'égalité

$$f = \sum_{\mathbf{M}^\nu \in \underline{Levi}(\mathbf{G}^\nu)} n^{\mathbf{G}}(\mathbf{M}^\nu)^{-1} ind_{\mathbf{M}^\nu}^{\mathbf{G}^\nu}(proj_{cusp,\mathbf{M}^\nu}(f)).$$

Plus généralement, si $\mathbf{L}^\nu$ est un sous-espace de Levi, on a

(2) pour tout $f \in C^{inv}(\mathbf{G}^\nu)$, on a l'égalité

$$res_{\mathbf{L}^\nu}^{\mathbf{G}^\nu}(f) = \sum_{\mathbf{M}^\nu \in \underline{Levi}(\mathbf{L}^\nu)} n^{\mathbf{L}}(\mathbf{M}^\nu)^{-1} ind_{\mathbf{M}^\nu}^{\mathbf{L}^\nu}(proj_{cusp,\mathbf{M}^\nu}(f)).$$

On utilisera la formule suivante, qui est équivalente à (1). Notons $Par(\mathbf{G}^\nu)$ l'ensemble des sous-espaces paraboliques de $\mathbf{G}^\nu$ (et non pas un ensemble de représentants des classes de conjugaison). Pour tout espace parabolique $\mathbf{P}^\nu$, fixons un nombre $z(\mathbf{P}^\nu) \in \mathbb{R}$ de sorte que les conditions suivantes soient vérifiées :

(3) la fonction $\mathbf{P}^\nu \mapsto z(\mathbf{P}^\nu)$ est constante sur les classes de conjugaison par $\mathbf{G}(\mathbb{F}_q)$;

(4) pour tout espace de Levi $\mathbf{M}^\nu$, on a $\sum_{\mathbf{P}^\nu \in \mathcal{P}(\mathbf{M}^\nu)} z(\mathbf{P}^\nu) = 1$.

Alors

(5) pour tout $f \in C^{inv}(\mathbf{G}^\nu)$, on a l'égalité

$$f = \sum_{\mathbf{P}^\nu \in Par(\mathbf{G}^\nu)} z(\mathbf{P}^\nu)(proj_{cusp,\mathbf{M}_{\mathbf{P}}^\nu}(f))[\mathbf{P}^\nu],$$

où, pour chaque $\mathbf{P}^\nu$, on a noté $\mathbf{M}_{\mathbf{P}}^\nu$ une de ses composantes de Levi.

Preuve. Considérons la formule (1). Pour chaque $\mathbf{M}^\nu \in \underline{Levi}(\mathbf{G}^\nu)$, soit $\mathbf{Q}^\nu \in \mathcal{P}(\mathbf{M}^\nu)$. Par définition, on a

$$ind_{\mathbf{M}^\nu}^{\mathbf{G}^\nu}(proj_{cusp,\mathbf{M}^\nu}(f)) = \sum_{\mathbf{P}^\nu}(proj_{cusp,\mathbf{M}_{\mathbf{P}}^\nu}(f))[\mathbf{P}^\nu],$$

où on somme sur les $\mathbf{P}^\nu \in Par(\mathbf{G}^\nu)$ conjugués à $\mathbf{Q}^\nu$. En vertu de (4), on peut sommer le membre de droite sur $\mathbf{Q}^\nu \in \mathcal{P}(\mathbf{M}^\nu)$, à condition de multiplier chaque terme par $z(\mathbf{Q}^\nu)$. Grâce à (3), on obtient

$$ind_{\mathbf{M}^\nu}^{\mathbf{G}^\nu}(proj_{cusp,\mathbf{M}^\nu}(f)) = \sum_{\mathbf{P}^\nu \in Par(\mathbf{G}^\nu)} z(\mathbf{P}^\nu)c(\mathbf{P}^\nu,\mathbf{M}^\nu)(proj_{cusp,\mathbf{M}_{\mathbf{P}}^\nu}(f))[\mathbf{P}^\nu],$$

où $c(\mathbf{P}^\nu,\mathbf{M}^\nu)$ est le nombre d'éléments $\mathbf{Q}^\nu \in \mathcal{P}(\mathbf{M}^\nu)$ qui sont conjugués à $\mathbf{P}^\nu$. Mais, pour $\mathbf{P}^\nu$ fixé, il y a un unique $\mathbf{M}^\nu \in \underline{Levi}(\mathbf{G}^\nu)$ tel que $c(\mathbf{P}^\nu,\mathbf{M}^\nu)$ soit non nul et, pour celui-ci, on a $c(\mathbf{P}^\nu,\mathbf{M}^\nu) = n^{\mathbf{G}}(\mathbf{M}^\nu)$. Alors (5) se déduit de (1). $\square$

3 Le groupe et son immeuble

Pour la suite de l'article, on fixe un corps local non-archimédien F de caractéristique nulle et un groupe algébrique connexe G défini sur F. On note $\mathbb{F}_q$ le corps résiduel de F, avec la notation usuelle : q est le nombre d'éléments de ce corps. On note p la caractéristique de $\mathbb{F}_q$. Introduisons le centre $Z(\hat{G})$ du dual de Langlands $\hat{G}$ de G. Ce sont des groupes complexes. Le groupe $Z(\hat{G})$ est muni d'une action du groupe de Galois $\Gamma = Gal(\bar{F}/F)$, où $\bar{F}$ est une clôture algébrique de F. On note $I \subset \Gamma$ le sous-groupe d'inertie et $Z(\hat{G})^I$ le sous-groupe des points fixes par I dans $Z(\hat{G})$. Le groupe Γ/I agit sur $X^*(Z(\hat{G})^I)$. On note $\mathcal{N} = X^*(Z(\hat{G})^I)^{\Gamma/I}$ le sous-groupe des invariants et $w_G : G(F) \to \mathcal{N}$ l'homomorphisme défini par Kottwitz. Cet homomorphisme est surjectif, cf. [10] 7.7. Le sous-groupe de torsion $\mathcal{N}_{tors}$ est fini.

On note $Imm(G_{AD})$ l'immeuble de G_{AD} sur F. Cet ensemble se décompose en réunion disjointe de facettes, on note $Fac(G)$ l'ensemble de ces facettes. Le groupe $G(F)$ agit sur $Imm(G_{AD})$. Pour $\mathcal{F} \in Fac(G)$, notons $K_{\mathcal{F}}^{\dagger}$ le stabilisateur de $\mathcal{F}$ dans $G(F)$.

Remarque 1. Soulignons qu'un élément de ce groupe conserve la facette $\mathcal{F}$ mais ne fixe pas forcément tout point de cette facette. La littérature immobilière considère souvent des fixateurs plutôt que des stabilisateurs. Par contre, elle considère des fixateurs de sous-ensembles compacts de l'immeubles qui ne sont pas forcément des facettes. Notre groupe $K_{\mathcal{F}}^{\dagger}$ est un tel fixateur. En effet, comme on le sait et comme on le rappellera au paragraphe 4, $\mathcal{F}$ s'identifie naturellement à un ouvert d'un espace affine réel muni d'une distance euclidienne. Alors $K_{\mathcal{F}}^{\dagger}$ est le fixateur du barycentre de $\mathcal{F}$.

L'image $K_{\mathcal{F}}^{\dagger}/Z(G)(F)$ de $K_{\mathcal{F}}^{\dagger}$ dans $G_{AD}(F)$ est un sous-groupe compact de $G_{AD}(F)$. Pour tout $\nu \in \mathcal{N}$, on note $K_{\mathcal{F}}^{\nu}$ l'ensemble des $x \in K_{\mathcal{F}}^{\dagger}$ tels que $w_G(x) = \nu$. On note $\mathcal{N}(\mathcal{F})$ le sous-groupe des $\nu \in \mathcal{N}$ tels que $K_{\mathcal{F}}^{\nu} \neq \emptyset$. Le plus grand sous-groupe compact de $K_{\mathcal{F}}^{\dagger}$ est la réunion des $K_{\mathcal{F}}^{\nu}$ pour $\nu \in \mathcal{N}(\mathcal{F}) \cap \mathcal{N}_{tors}$. L'ensemble $K_{\mathcal{F}}^{0}$ est un groupe, c'est le groupe parahorique associé à $\mathcal{F}$.

Remarque 2. Cette description des groupes parahoriques est tirée de [11] 2.16 (malheureusement non publié) et de [9] proposition 3 et remarque 4. Cette dernière référence s'applique en vertu de la remarque 1 ci-dessus.

Bruhat et Tits ont défini un sous-groupe $K_{\mathcal{F}}^{+}$ de $K_{\mathcal{F}}^{0}$ qui est distingué dans $K_{\mathcal{F}}^{\dagger}$ et pro$-p$-unipotent et un groupe réductif connexe $\mathbf{G}_{\mathcal{F}}$ sur $\mathbb{F}_q$ de sorte que $K_{\mathcal{F}}^{0}/K_{\mathcal{F}}^{+}$ soit isomorphe à $\mathbf{G}_{\mathcal{F}}(\mathbb{F}_q)$. Pour $\nu \in \mathcal{N}(\mathcal{F})$, il existe un espace tordu $\mathbf{G}_{\mathcal{F}}^{\nu}$ sous $\mathbf{G}_{\mathcal{F}}$ de sorte que $K_{\mathcal{F}}^{\nu}/K_{\mathcal{F}}^{+}$ s'identifie à $G_{\mathcal{F}}^{\nu}(\mathbb{F}_q)$, cf. [11] proposition 2.10.3. Dans le cas où $\nu = 0$, on a $\mathbf{G}_{\mathcal{F}}^{0} = \mathbf{G}_{\mathcal{F}}$.

Le groupe $K_{\mathcal{F}}^{0}$ fixe tout point de $\mathcal{F}$. Pour $\nu \in \mathcal{N}(\mathcal{F})$, il existe une permutation $\sigma_{\mathcal{F},\nu}$ de $\mathcal{F}$ telle que tout élément de $K_{\mathcal{F}}^{\nu}$ agisse sur $\mathcal{F}$ par cette permutation. Comme on l'a rappelé ci-dessus, $\mathcal{F}$ s'identifie naturellement à un ouvert d'un espace affine réel muni d'une distance euclidienne. La permutation $\sigma_{\mathcal{F},\nu}$ est une isométrie. On note $\mathcal{F}^{\nu}$ le sous-ensemble des éléments de $\mathcal{F}$ qui sont fixés par $\sigma_{\mathcal{F},\nu}$. C'est donc l'intersection de $\mathcal{F}$ avec un sous-espace affine. On note $Fac^*(G)$ l'ensemble des couples $(\mathcal{F},\nu)$ où $\mathcal{F} \in Fac(G)$ et $\nu \in \mathcal{N}(\mathcal{F})$.

On dit qu'un élément de $g \in G(F)$ est compact modulo $Z(G)$ si son image dans $G_{AD}(F)$ est contenue dans un sous-groupe compact de ce groupe. Cette condition est équivalente à ce qu'il existe $(\mathcal{F},\nu) \in Fac^*(G)$ tel que $g \in K_{\mathcal{F}}^{\nu}$.

4 Les facettes d'un appartement

Fixons un sous-groupe de Levi minimal M_{min} de G. Posons $A = A_{M_{min}}$ et $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{M_{Min}} = X_*(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. Notons $Norm_{G(F)}(A)$ le normalisateur de A dans $G(F)$. Le quotient $W = Norm_{G(F)}(A)/M_{min}(F)$ est le groupe de Weyl W de G relatif à A. Le groupe W agit sur l'espace $\mathcal{A}$. On munit celui-ci d'une norme euclidienne invariante par cette action. On note Σ l'ensemble des racines **réduites** de A dans G. A tout $\alpha \in \Sigma$ est associé un sous-groupe radiciel U_α de G.

Au tore A est associé un appartement $App(A) \subset Imm(G_{AD})$. C'est une réunion de facettes, on note $Fac(G; A)$ l'ensemble des facettes contenues dans $App(A)$ et $Fac^*(G; A)$ l'ensemble des $(\mathcal{F}, \nu) \in Fac^*(G)$ tels que $\mathcal{F}$ soit contenue dans $App(A)$. L'appartement $App(A)$ s'identifie à $\mathcal{A}/\mathcal{A}_G$.

Remarque 1. Nous distinguons dans la notation $App(A)$ et $\mathcal{A}/\mathcal{A}_G$ car $App(A)$ apparaît comme un espace affine sur l'espace vectoriel $\mathcal{A}/\mathcal{A}_G$. Les actions naturelles sur $App(A)$ sont affines tandis que celles sur $\mathcal{A}/\mathcal{A}_G$ sont linéaires. Pour deux éléments $x, y \in App(A)$, nous considérerons $x - y$ comme un élément de $\mathcal{A}/\mathcal{A}_G$.

Remarque 2. La théorie générale des immeubles fait intervenir toutes les racines de A dans G, pas seulement les racines réduites. C'est nécessaire pour décrire précisément les groupes $K^0_{\mathcal{F}}$. Mais nous n'aurons pas besoin d'un telle précision, la description des facettes nous suffit et, pour cela, les racines affines n'interviennent que par les hyperplans affines sur lesquels elles s'annulent. Si le système de racines contient des racines α tels que 2α est encore une racine, on peut donc remplacer toute racine affine de la forme $2\alpha + c$ par la fonction affine $\alpha + c/2$: les hyperplans associés à ces fonctions sont les mêmes. Cela nous permet de ne considérer que les racines réduites, comme nous le faisons.

L'action sur l'immeuble du sous-groupe $Norm_{G(F)}(A)$ de $G(F)$ conserve $App(A)$ (inversement, un élément de $G(F)$ dont l'action sur l'immeuble conserve $App(A)$ appartient à $Norm_{G(F)}(A)$). Cette action est compatible avec l'action linéaire de $Norm_{G(F)}(A)$ sur $\mathcal{A}$ via son quotient W dans le sens suivant : soient $n \in Norm_{G(F)}(A)$, $x \in App(A)$ et $e \in \mathcal{A}/\mathcal{A}_G$; notons w l'image de n dans W ; alors $n(x + e) = n(x) + w(e)$. A tout $\alpha \in \Sigma$ est associé un certain sous-ensemble Γ_α de $\mathbb{Q}$. C'est l'image réciproque dans $\mathbb{Q}$ d'un sous-ensemble fini de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ et on a $\mathbb{Z} \subset \Gamma_\alpha$. On a $\Gamma_{-\alpha} = -\Gamma_\alpha$. Pour $c \in \Gamma_\alpha$, on note c^+ le plus petit élément de Γ_α strictement supérieur à c et on note c^- le plus grand élément de Γ_α strictement inférieur à c. On note $H_{\alpha,c}$ l'hyperplan affine de $App(A)$ défini par l'équation $\alpha(x) = c$. Alors la décomposition en facettes de $App(A)$ est définie par la famille d'hyperplans $(H_{\alpha,c})_{\alpha\in\Sigma, c\in\Gamma_\alpha}$. Ainsi, à toute facette $\mathcal{F} \in Fac(G; A)$ est associé un sous-ensemble $\Sigma_{\mathcal{F}} \subset \Sigma(A)$ et, pour tout $\sigma \in \Sigma(A)$, un élément $c_{\alpha,\mathcal{F}} \in \Gamma_\alpha$ de sorte que $\mathcal{F}$ soit le sous-ensemble des éléments $x \in App(A)$ vérifiant les relations

(1) $\alpha(x) = c_{\alpha,\mathcal{F}}$ pour tout $\alpha \in \Sigma_{\mathcal{F}}$;

(2) $c_{\alpha,\mathcal{F}} < \alpha(x) < c^+_{\alpha,\mathcal{F}}$ pour tout $\alpha \in \Sigma - \Sigma_{\mathcal{F}}$.

Remarque. Dans le cas où G est quasi-déployé, Γ_α est un groupe dont la description est donnée en [11] 2.5 ou [6] 4.2.21. On en déduit la description ci-dessus de Γ_α quand G n'est pas quasi-déployé par descente étale, cf. [6] 5.1.19.

Introduisons le sous-tore $A_{\mathcal{F}} \subset A$ tel que $X_*(A_{\mathcal{F}})$ soit le sous-ensemble des éléments de $X_*(A)$ annulés par tous les éléments de $\Sigma_{\mathcal{F}}$. Soit $M_{\mathcal{F}}$ le commutant de $A_{\mathcal{F}}$ dans G. C'est un sous-groupe de Levi de G. Puisque $A_{\mathcal{F}}$ est contenu dans A, $M_{\mathcal{F}}$ contient M_{min}. Notons $\Sigma^{M_{\mathcal{F}}} \subset \Sigma$ le sous-ensemble des racines réduites de A dans $M_{\mathcal{F}}$ autrement dit des éléments de Σ qui sont triviaux sur $A_{M_{\mathcal{F}}}$. On a

(3) $A_{\mathcal{F}} = A_{M_{\mathcal{F}}}$; $\Sigma_{\mathcal{F}} \subset \Sigma^{M_{\mathcal{F}}}$ et ces deux ensembles engendrent le même $\mathbb{Q}$-sous-espace vectoriel de $X_*(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

Preuve. Pour $\alpha \in \Sigma_{\mathcal{F}}$, α s'annule sur $X_*(A_{\mathcal{F}})$ donc le groupe radiciel U_α commute à $A_{\mathcal{F}}$ et est inclus dans $M_{\mathcal{F}}$. Cela démontre que $\Sigma_{\mathcal{F}} \subset \Sigma^{M_{\mathcal{F}}}$. Par définition de $M_{\mathcal{F}}$, $A_{\mathcal{F}}$ est inclus dans le centre de ce groupe, donc aussi dans son plus grand tore central déployé $A_{M_{\mathcal{F}}}$. Inversement, $X_*(A_{M_{\mathcal{F}}})$ est le sous-ensemble des éléments de $X_*(A)$ annulés par tous les éléments de $\Sigma^{M_{\mathcal{F}}}$. Cet ensemble contenant $\Sigma_{\mathcal{F}}$, on a $X_*(A_{M_{\mathcal{F}}}) \subset X_*(A_{\mathcal{F}})$, d'où $A_{M_{\mathcal{F}}} \subset A_{\mathcal{F}}$. Enfin, la dernière assertion résulte de ce que les deux ensembles ont le même annulateur dans $X_*(A)$. $\square$

Remarque. Par contre, $\Sigma^{M_{\mathcal{F}}}$ n'est en général pas engendré sur $\mathbb{Z}$ par $\Sigma_{\mathcal{F}}$.

Posons $\mathcal{A}_{\mathcal{F}} = X_*(A_{\mathcal{F}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, autrement dit, $\mathcal{A}_{\mathcal{F}} = \mathcal{A}_{M_{\mathcal{F}}}$ avec la notation introduite en 1. Il résulte de (1) et (2) que $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}/\mathcal{A}_G$ est le sous-espace de $\mathcal{A}/\mathcal{A}_G$ engendré par les $x - y$ pour $x, y \in \mathcal{F}$. Cela entraîne que, pour $n \in K^0_{\mathcal{F}} \cap Norm_{G(F)}(A)$, l'image w de n dans W conserve $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ et y agit trivialement. Autrement dit, w appartient au sous-groupe $W^{M_{\mathcal{F}}}$ qui est le groupe de Weyl de $M_{\mathcal{F}}$ relatif à A. Une racine $\alpha \in \Sigma$ est constante sur $\mathcal{F}$ si et seulement si elle annule l'espace engendré par les $x - y$ pour $x, y \in \mathcal{F}$, c'est-à-dire $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$. Donc $\Sigma^{M_{\mathcal{F}}}$ est l'ensemble des éléments de Σ qui sont constants sur $\mathcal{F}$. Pour $\alpha \in \Sigma^{M_{\mathcal{F}}}$, la valeur constante de α sur $\mathcal{F}$ appartient à Γ_α si et seulement si $\alpha \in \Sigma_{\mathcal{F}}$. La facette $\mathcal{F}$ est un ouvert du sous-espace affine de *App*(A) défini par la relation (1), dont l'espace vectoriel associé est $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$.

Les constructions de Bruhat-Tits associent à tout $\alpha \in \Sigma$ et à tout $c \in \Gamma_\alpha$ un sous-groupe ouvert compact $U_{\alpha,c}$ de $U_\alpha(F)$. Les propriétés suivantes sont bien connues (cf. [11] 2.5 et 2.13, [5] 6.4.9 et 7.4.4) :

(4) l'application $c \mapsto U_{\alpha,c}$ est strictement croissante (si $c < c'$, $U_{\alpha,c} \subsetneq U_{\alpha,c'}$) ;

(5) $\cup_{c\in\Gamma_\alpha} U_{\alpha,c} = U_\alpha(F)$;

(6) quelle que soit $\mathcal{F} \in Fac(G; A)$, on a $U_\alpha(F) \cap K^0_{\mathcal{F}} = U_{\alpha,c_{\alpha,\mathcal{F}}}$;

(7) quelle que soit $\mathcal{F} \in Fac(G; A)$, on a $U_\alpha(F) \cap K^+_{\mathcal{F}} = U_{\alpha,c^-_{\alpha,\mathcal{F}}}$ si $\alpha \in \Sigma_{\mathcal{F}}$ et $U_\alpha(F) \cap K^+_{\mathcal{F}} = U_\alpha(F) \cap K^0_{\mathcal{F}} = U_{\alpha,c_{\alpha,\mathcal{F}}}$ si $\alpha \notin \Sigma_{\mathcal{F}}$.

Soit $\mathcal{F} \in Fac(G; A)$. Il est bien connu que l'ensemble des sous-groupes paraboliques de $\mathbf{G}_{\mathcal{F}}$ est en bijection avec celui des facettes $\mathcal{F}'$ telles que $\mathcal{F}$ soit contenue dans l'adhérence $\overline{\mathcal{F}'}$ de $\mathcal{F}'$. Précisément, pour une telle facette $\mathcal{F}'$, on a $K^0_{\mathcal{F}'} \subset K^0_{\mathcal{F}}$ et le parabolique $\mathbf{P}_{\mathcal{F}'}$ associé à $\mathcal{F}'$ est celui pour lequel l'image de $K^0_{\mathcal{F}'}$ dans $\mathbf{G}_{\mathcal{F}}(\mathbb{F}_q)$ est égale à $\mathbf{P}_{\mathcal{F}'}(\mathbb{F}_q)$. Il est utile de donner une interprétation plus algébrique de ces sous-groupes paraboliques. Le groupe $\mathbf{G}_{\mathcal{F}}$ est la fibre spéciale d'un schéma en groupes sur l'anneau des entiers de F qui contient un modèle entier du tore A, cf. [11] 2.11. La fibre spéciale de celui-ci est un sous-tore déployé maximal $\mathbf{A}$ de $\mathbf{G}_{\mathcal{F}}$, qui vérifie les propriétés suivantes :

(8) $X_*(\mathbf{A}) \simeq X_*(A)$;

(9) soit $n \in Norm_{G(F)}(A) \cap K^\dagger_{\mathcal{F}}$; la conjugaison ad_n par n conserve $K^0_{\mathcal{F}}$ et $K^+_{\mathcal{F}}$ donc se descend en un automorphisme $ad_{n,\mathcal{F}}$ de $\mathbf{G}_{\mathcal{F}}(\mathbb{F}_q)$; alors $ad_{n,\mathcal{F}}$ conserve $\mathbf{A}$ et les actions déduites de ad_n sur $X_*(A)$ et de $ad_{n,\mathcal{F}}$ sur $X_*(\mathbf{A})$ coïncident via l'isomorphisme (8).

Soit $\mathcal{F}'$ une facette de *App*(A) dont l'adhérence contient $\mathcal{F}$. Via l'isomorphisme (8), le sous-tore $A_{\mathcal{F}'}$ de A correspond à un sous-tore $\mathbf{A}_{\mathcal{F}'}$ de $\mathbf{A}$. Il est connu que le commutant $\mathbf{M}_{\mathcal{F}'}$ de $\mathbf{A}_{\mathcal{F}'}$ dans $\mathbf{G}_{\mathcal{F}}$ est une composante de Levi du sous-groupe parabolique $\mathbf{P}_{\mathcal{F}'}$ et que $\mathbf{A}_{\mathcal{F}'}$ est le plus grand sous-tore déployé dans le centre de $\mathbf{M}_{\mathcal{F}'}$. Le sous-groupe $\mathbf{P}_{\mathcal{F}'}$ détermine une chambre ouverte dans l'espace $\mathcal{A}_{\mathcal{F}'}$ (puisque cet espace s'identifie à $X_*(\mathbf{A}_{\mathcal{F}'}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$). En utilisant (5) et (6) on voit que cette chambre est définie par les relations $\alpha(x) > 0$ pour les $\alpha \in \Sigma_{\mathcal{F}} - \Sigma_{\mathcal{F}'}$ telles que $c_{\alpha,\mathcal{F}} = c_{\alpha,\mathcal{F}'}$. On voit aussi que

$\mathbf{M}_{\mathcal{F}'}(\mathbb{F}_q)$ s'identifie à $\mathbf{G}_{\mathcal{F}'}(\mathbb{F}_q)$. On montre que cet isomorphisme est algébrique c'est-à-dire qu'il provient d'un isomorphisme $\mathbf{M}_{\mathcal{F}'} \simeq \mathbf{G}_{\mathcal{F}'}$.

Les conditions (1) et (2) sont en général surabondantes pour décrire une facette. Donnons-en une autre description. Décomposons G_{AD} en produit de composantes simples $G_{1,AD} \times ... \times G_{k,AD}$. L'image A_{ad} de A dans G_{AD} se décompose conformément en produit $A_{ad,1} \times ... \times A_{ad,k}$. L'ensemble Σ se décompose de même en union disjointe de composantes irréductibles $\Sigma_1 \sqcup ... \sqcup \Sigma_k$. Alors $App(A)$ s'identifie au produit $App(A_{ad,1}) \times ..; \times App(A_{ad,k})$ et toute facette $\mathcal{F}$ se décompose en produit de facettes $\mathcal{F}_1 \times ... \times \mathcal{F}_k$. Cela nous ramène au cas où G_{AD} est simple, ce que nous supposons ci-après. Considérons une facette ouverte $\mathcal{F}_{min} \in Fac(G; A)$. Alors $\Sigma_{\mathcal{F}_{min}} = \emptyset$. Il existe un sous-ensemble $\{\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n\}$ de Σ tel que :

(10) $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ est une base de Σ (au sens des systèmes de racines) ;

(11) α_0 est l'opposé de la racine réduite associée à la plus grande racine relativement à cette base ;

(12) $\mathcal{F}_{min}$ est l'ensemble des $x \in App(A)$ tels que $c_{\alpha_i,\mathcal{F}_{min}} < \alpha_i(x)$ pour tout $i = 0, ..., n$.

D'après (10) et (11), il y a une relation $\sum_{i=0,...,n} h_i\alpha_i = 0$ avec des entiers $h_i > 0$ et cette relation est, à homothétie près, la seule relation entre les α_i. Les sommets de l'adhérence de $\mathcal{F}_{min}$ sont les points s_i, $i = 0, ..., n$ définis par les relations $\alpha_j(s_i) = c_{\alpha_i,\mathcal{F}_{min}}$ pour $j \neq i$. A tout sous-ensemble non vide $I \subset \{0, ..., n\}$, associons l'ensemble $\mathcal{F}_I$ des $x \in App(A)$ tels que $c_{\alpha_i,\mathcal{F}_{min}}(x) = \alpha_i(x)$ pour $i \notin I$ et $c_{\alpha_i,\mathcal{F}_{min}}(x) < \alpha_i(x)$ pour $i \in I$. L'application $I \mapsto \mathcal{F}_I$ est une bijection entre l'ensemble des sous-ensembles non vides de $\{0, ..., n\}$ et l'ensemble des facettes contenues dans l'adhérence de $\mathcal{F}_{min}$. Les sommets de l'adhérence de la facette $\mathcal{F}_I$ sont les s_i pour $i \in I$. La facette est l'intérieur relatif de l'enveloppe convexe de ses sommets (intérieur relatif au sens où l'on considère cette enveloppe convexe comme un sous-ensemble du plus petit sous-espace affine de $App(A)$ qui la contient).

Pour toute facette $\mathcal{F} \in Fac(G; A)$, il existe $g \in Norm_{G(F)}(A)$ tel que $g(\mathcal{F})$ soit contenue dans l'adhérence de $\mathcal{F}_{min}$.

5 Description des ensembles $\mathcal{F}^\nu$

Soit $(\mathcal{F}, \nu) \in Fac^*(G; A)$. La facette $\mathcal{F}$ est définie par les relations (1) et (2) du paragraphe précédent. On sait (cf. [5] 7.4.4, [11] 2.13) que

(1) $K^\nu_{\mathcal{F}}$ est engendré par $K^0_{\mathcal{F}}$ et un élément quelconque de $Norm_{G(F)}(A) \cap K^\nu_{\mathcal{F}}$.

Fixons un élément n de cette intersection, notons w son image dans W. La permutation $\sigma_{\mathcal{F},\nu}$ (cf. paragraphe 3) est la restriction à $\mathcal{F}$ de l'action de n sur $App(A)$. Celle-ci est une action affine et sa composante linéaire est l'action de w sur $\mathcal{A}/\mathcal{A}_G$. De plus, l'action de n fixe le barycentre de $\mathcal{F}$. Cela entraîne que w conserve l'ensemble $\Sigma_{\mathcal{F}}$, qu'il normalise $W^{M_{\mathcal{F}}}$ et que l'action linéaire de w sur $\mathcal{A}$ conserve $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$. Notons $\mathcal{A}^\nu_{\mathcal{F}}$ le sous-espace des points fixes. On peut aussi bien définir un tore $A^\nu_{\mathcal{F}}$ comme la composante neutre de l'ensemble des points fixes par w dans $A_{\mathcal{F}}$ et alors $\mathcal{A}^\nu_{\mathcal{F}} = X_*(A^\nu_{\mathcal{F}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. Comme on le sait, parmi les sous-groupes de Levi L de G, contenant $M_{\mathcal{F}}$ et tels que w appartienne à W^L, il en existe un unique qui soit minimal. On le note $M_{\mathcal{F},\nu}$. Il est caractérisé par l'égalité $\mathcal{A}_{M_{\mathcal{F},\nu}} = \mathcal{A}^\nu_{\mathcal{F}}$. On voit que $\mathcal{A}^\nu_{\mathcal{F}}/\mathcal{A}_G$ est aussi l'espace engendré par les $x - y$ pour $x, y \in \mathcal{F}^\nu$. L'ensemble de racines $\Sigma^{M_{\mathcal{F},\nu}}$ étant celui des éléments de Σ qui annulent $A^\nu_{\mathcal{F}}$, c'est aussi celui des éléments de Σ qui sont constants sur $\mathcal{F}^\nu$. Une conséquence de ce qui précède, on a l'inclusion

$$(2) \qquad Norm_{G(F)}(A) \cap K^\nu_{\mathcal{F}} \subset Norm_{M_{\mathcal{F},\nu}(F)}(A).$$

L'ensemble $\mathcal{F}^\nu$ est un polysimplexe. En effet, on peut supposer que $\mathcal{F}$ est contenue dans l'adhérence d'une facette $\mathcal{F}_{min}$ comme au paragraphe 4. Puisque la permutation $\sigma_{\mathcal{F},\nu}$ provient de l'action d'un élément de $Norm_{G(F)}(A)$, on se ramène facilement au cas où G_{AD} est simple, ce que l'on suppose ci-après. Il existe un unique sous-ensemble non vide $I \subset \{0,...,n\}$ de sorte que $\mathcal{F} = \mathcal{F}_I$. L'adhérence $\bar{\mathcal{F}}$ de la facette $\mathcal{F}$ est l'enveloppe convexe des points s_i pour $i \in I$. Fixons un point $s \in \mathcal{F}^\nu$. Alors $\mathcal{F}$ est l'ensemble des $x \in App(A)$ pour lesquels il existe une famille $(a_i)_{i\in I}$ de réels telle que

$a_i > 0$ pour tout $i \in I$ et $\sum_{i\in I} a_i = 1$;

$x - s = \sum_{i\in I} a_i(s_i - s)$.

L'espace affine engendré par les s_i pour $i \in I$ est de dimension $|I| - 1$. On vérifie que cela entraîne que la famille $(a_i)_{i\in I}$ ci-dessus est unique. Puisque la permutation $\sigma_{\mathcal{F},\nu}$ conserve $\mathcal{F}$, elle permute les sommets de $\bar{\mathcal{F}}$ et définit une permutation de I. Notons I^ν l'ensemble des orbites. Un point x écrit comme ci-dessus est fixé par $\sigma_{\mathcal{F},\nu}$ si et seulement si, pour toute orbite i^ν, la fonction $i \mapsto a_i$ est constante sur i^ν. On note a_{i^ν} cette valeur constante multipliée par $|i^\nu|$ et on note s_{i^ν} le point défini par l'égalité $s_{i^\nu} - s = |i^\nu|^{-1} \sum_{i\in i^\nu} s_i - s$. Alors $\sum_{i^\nu\in I^\nu} a_{i^\nu} = 1$ et

$$x - s = \sum_{i^\nu \in I^\nu} a_{i^\nu}(s_{i^\nu} - s).$$

Autrement dit, x appartient à l'intérieur relatif de l'enveloppe convexe des points s_{i^ν}. La réciproque est immédiate, donc $\mathcal{F}^\nu$ est égale à l'intérieur relatif de cette enveloppe convexe. On vérifie que l'espace affine engendré par les s_{i^ν} pour $i^\nu \in I^\nu$ est de dimension $|I^\nu| - 1$. Donc cette enveloppe convexe est un simplexe. Cette description montre de plus que les facettes de l'adhérence du simplexe $\bar{\mathcal{F}}^\nu$ sont les $\mathcal{F}_J \cap \bar{\mathcal{F}}^\nu$ pour les ensembles non vides $J \subset I$ qui sont invariants par $\sigma_{\mathcal{F},\nu}$.

On a

(3) pour $\mathcal{F}_1 \in Fac(G; A)$, les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) $\nu \in \mathcal{N}(\mathcal{F}_1)$ et $\mathcal{F}_1 \subset \bar{\mathcal{F}}$;

(b) $\mathcal{F}_1 \cap \bar{\mathcal{F}}^\nu \neq \emptyset$;

(c) $\nu \in \mathcal{N}(\mathcal{F}_1)$ et $\mathcal{F}_1^\nu = \mathcal{F}_1 \cap \bar{\mathcal{F}}^\nu$;

(4) l'application $\mathcal{F}_1 \mapsto \mathcal{F}_1 \cap \bar{\mathcal{F}}^\nu$ est une bijection entre l'ensemble des facettes de $App(A)$ vérifiant les conditions de (3) et celui des facettes de l'adhérence du polysimplexe $\mathcal{F}^\nu$.

Preuve de (3). Modifions un instant nos hypothèses : on ne suppose plus que $\nu \in \mathcal{F}$ mais on suppose que $\mathcal{F}$ est une facette ouverte. Soit $\mathcal{F}_1$ vérifiant (a). Fixons $n_1 \in Norm_{G(F)}(A) \cap K^\nu_{\mathcal{F}_1}$. L'action de n_1 envoie $\mathcal{F}$ sur une facette ouverte $\mathcal{F}'$ dont l'adhérence contient encore $\mathcal{F}_1$. Il correspond aux facettes $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ des sous-groupes de Borel $\mathbf{B}_{\mathcal{F}}$ et $\mathbf{B}_{\mathcal{F}'}$ de $\mathbf{G}_{\mathcal{F}_1}$. On sait qu'il existe un élément de $\mathbf{G}_{\mathcal{F}_1}(\mathbb{F}_q)$ qui conjugue $\mathbf{B}_{\mathcal{F}'}$ en $\mathbf{B}_{\mathcal{F}}$. En relevant cet élément en un élément $k \in K^0_{\mathcal{F}_1}$, cet élément k envoie $\mathcal{F}'$ sur $\mathcal{F}$. Alors $g = kn_1$ est un élément de $K^\nu_{\mathcal{F}_1}$ qui conserve $\mathcal{F}$. Cela entraîne que $\nu \in \mathcal{N}(\mathcal{F})$ et que $g \in K^\nu_{\mathcal{F}_1} \cap K^\nu_{\mathcal{F}}$. Alors $\mathcal{F}_1^\nu$, resp. $\mathcal{F}^\nu$, est l'intersection de $\mathcal{F}_1$, resp. $\mathcal{F}$, avec l'ensemble des points fixes de g. Ce dernier ensemble est convexe. Fixons $y \in \mathcal{F}^\nu$. Pour $x \in \mathcal{F}_1^\nu$, le segment $[x, y]$ joignant x à y est contenu dans cet ensemble de points fixes. Mais le segment $]x, y]$ ouvert en x

est aussi contenu dans $\mathcal{F}$. Donc $]x,y]$ est inclus dans $\mathcal{F}^\nu$ et x appartient à l'adhérence de cet ensemble. Cela prouve (c).

Remarque. On vient de prouver que, pour toute facette ouverte $\mathcal{F}$ dont l'adhérence contient une facette $\mathcal{F}_1$ telle que $\nu \in \mathcal{N}(\mathcal{F}_1)$, on a $\nu \in \mathcal{N}(\mathcal{F})$. Puisque toutes les facettes ouvertes sont conjuguées par l'action de G, on obtient

(5) soient deux facettes $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}_1$; supposons $\mathcal{F}$ ouverte ; alors $\mathcal{N}(\mathcal{F}_1) \subset \mathcal{N}(\mathcal{F})$.

Revenons maintenant à nos hypothèses : $n \in \mathcal{N}(\mathcal{F})$ mais $\mathcal{F}$ n'est plus supposée ouverte. Soit $\mathcal{N}_1$ vérifiant (a). On fixe une facette ouverte $\mathcal{F}_{min}$ dont l'adhérence contient $\mathcal{F}$, donc aussi $\mathcal{F}_1$. D'après ce que l'on vient de prouver, on a $\nu \in \mathcal{N}(\mathcal{F}_{min})$ et $\mathcal{F}_1^\nu = \mathcal{F}_1 \cap \bar{\mathcal{F}}_{min}^\nu$. On peut appliquer le même résultat pour $\mathcal{F}$: $\mathcal{F}^\nu = \mathcal{F} \cap \bar{\mathcal{F}}_{min}^\nu$. Fixons $y \in \mathcal{F}^\nu$ et soit $x \in \mathcal{F}_1^\nu$. De nouveau, le segment $[x,y]$ est inclus dans $\bar{\mathcal{F}}_{min}^\nu$. Le segment $]x,y]$ est inclus dans $\mathcal{F}$, donc dans $\mathcal{F}^\nu$. Mais alors x appartient à l'adhérence de $\mathcal{F}^\nu$, ce qui démontre (c). Il est clair que (c) implique (b). Enfin, si (b) est vérifiée, l'élément n introduit plus haut fixe tout point de $\bar{\mathcal{F}}^\nu$ donc fixe un point de $\mathcal{F}_1$, donc conserve cette facette. Puisque $w_G(n) = \nu$, cela entraîne $\nu \in \mathcal{N}(\mathcal{F}_1)$. Enfin, $\mathcal{F}_1$ coupe $\bar{\mathcal{F}}$ et est donc incluse dans cette adhérence. Cela prouve (a) et achève la démonstration de (3).

Preuve de (4). D'après la description de $\bar{\mathcal{F}}^\nu$ donnée plus haut, il existe un sous-ensemble fini $\mathcal{X}$ de $Fac(G;A)$ tel que l'application $\mathcal{F}_1 \mapsto \mathcal{F}_1 \cap \bar{\mathcal{F}}^\nu$ soit une bijection de $\mathcal{X}$ sur l'ensemble des facettes du polysimplexe $\bar{\mathcal{F}}^\nu$. Puisque deux facettes distinctes sont disjointes, $\mathcal{X}$ ne peut être que l'ensemble des $\mathcal{F}_1 \in Fac(G;A)$ telles que $\mathcal{F}_1 \cap \bar{\mathcal{F}}^\nu$ ne soit pas vide. C'est-à-dire celui des facettes vérifiant le (b) de (3). Cela démontre (4). $\square$

Montrons que

(6) l'ensemble des sous-espaces paraboliques de $\mathbf{G}_{\mathcal{F}}^\nu$ est en bijection avec celui des facettes $\mathcal{F}'$ telles que $\mathcal{F}$ soit contenue dans $\bar{\mathcal{F}}'$ et que ν appartienne à $\mathcal{N}(\mathcal{F}')$; pour une telle facette $\mathcal{F}'$, on a $K_{\mathcal{F}'}^\nu \subset K_{\mathcal{F}}^\nu$ et l'espace parabolique $\mathbf{P}_{\mathcal{F}'}^\nu$ associé à $\mathcal{F}'$ est tel que $\mathbf{P}_{\mathcal{F}'}^\nu(\mathbb{F}_q)$ soit l'image de $K_{\mathcal{F}'}^\nu$ dans $\mathbf{G}_{\mathcal{F}}^\nu(\mathbb{F}_q)$.

Preuve. Soit $\mathbf{P}^\nu$ un sous-espace parabolique de $\mathbf{G}_{\mathcal{F}}^\nu$. Il lui est associé un sous-groupe parabolique $\mathbf{P}$ de $\mathbf{G}_{\mathcal{F}}$, donc aussi une facette $\mathcal{F}'$ telle que $\mathcal{F} \subset \bar{\mathcal{F}}'$ et $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{\mathcal{F}'}$. Soit $g \in K_{\mathcal{F}}^\nu$ dont l'image $\mathbf{g}$ dans $\mathbf{G}_{\mathcal{F}}^\nu(\mathbb{F}_q)$ appartienne à $\mathbf{P}^\nu(\mathbb{F}_q)$. L'action de g sur l'immeuble envoie $\mathcal{F}'$ sur une facette $\mathcal{F}''$ dont l'adhérence contient encore $\mathcal{F}$. Il lui est associé un sous-groupe parabolique $\mathbf{P}_{\mathcal{F}''}$ de $\mathbf{G}_{\mathcal{F}}$. Alors l'action de $\mathbf{g}$ par conjugaison sur $\mathbf{G}_{\mathcal{F}}$ envoie $\mathbf{P}_{\mathcal{F}'}$ sur $\mathbf{P}_{\mathcal{F}''}$. Puisque $\mathbf{g}$ appartient à $\mathbf{P}^\nu(\mathbb{F}_q)$, l'action de $\mathbf{g}$ conserve $\mathbf{P}_{\mathcal{F}'}$. Cela entraîne $\mathbf{P}_{\mathcal{F}''} = \mathbf{P}_{\mathcal{F}'}$, d'où $\mathcal{F}'' = \mathcal{F}'$. Donc g appartient à $K_{\mathcal{F}'}^\dagger$. Puisque $w_G(g) = \nu$, cela entraîne $g \in K_{\mathcal{F}'}^\nu$. A fortiori, cet ensemble n'est pas vide, donc $\nu \in \mathcal{N}(\mathcal{F}')$.

Réciproquement, soit $\mathcal{F}'$ une facette de l'immeuble telle que $\mathcal{F}$ soit contenue dans $\bar{\mathcal{F}}'$ et que ν appartienne à $\mathcal{N}(\mathcal{F}')$. Puisque deux facettes sont toujours contenues dans un appartement, on ne perd rien à supposer que $\mathcal{F}'$ est contenue dans $App(A)$. D'après (3), $\mathcal{F}^\nu$ est contenu dans $\bar{\mathcal{F}}'^\nu$. Soit n' un élément de $Norm_{G(F)}(A) \cap K_{\mathcal{F}'}^\nu$. Alors l'action de n' fixe tout point de $\bar{\mathcal{F}}'^\nu$, donc fixe tout point de $\mathcal{F}^\nu$, donc conserve $\mathcal{F}$, donc appartient à $K_{\mathcal{F}}^\nu$. Notons $\mathbf{n}'$ 'image de n' dans $\mathbf{G}_{\mathcal{F}}^\nu(\mathbb{F}_q)$. L'action de $\mathbf{n}'$ dans $\mathbf{G}_{\mathcal{F}}$ conserve le sous-groupe parabolique $\mathbf{P}_{\mathcal{F}'}$. Donc $\mathbf{P}_{\mathcal{F}'}^\nu = \mathbf{n}'\mathbf{P}_{\mathcal{F}'}$ est un sous-espace parabolique de $\mathbf{G}_{\mathcal{F}}^\nu$. Puisqu'on sait d'après (1) que $K_{\mathcal{F}'}^\nu = n'K_{\mathcal{F}'}^0$, les dernières assertions résultent de la définition ci-dessus de $\mathbf{P}_{\mathcal{F}'}^\nu$ et du fait que $\mathbf{P}_{\mathcal{F}'}(\mathbb{F}_q)$ est l'image naturelle de $K_{\mathcal{F}'}^0$ dans $\mathbf{G}_{\mathcal{F}}(\mathbb{F}_q)$. $\square$

Introduisons le sous-tore déployé maximal $\mathbf{A}$ de $\mathbf{G}_{\mathcal{F}}$ vérifiant les conditions (8) et (9) du paragraphe 4. Soit $\mathcal{F}'$ une facette de $App(A)$ dont l'adhérence contient $\mathcal{F}$ et telle que $\nu \in \mathcal{N}(\mathcal{F}')$. Via l'isomorphisme $X_*(\mathbf{A}) \simeq X_*(A)$, le sous-tore $A_{\mathcal{F}'}$ de A correspond à un sous-tore $\mathbf{A}_{\mathcal{F}'}$ de $\mathbf{A}$. On a déjà dit que le commutant $\mathbf{M}_{\mathcal{F}'}$ de $\mathbf{A}_{\mathcal{F}'}$ dans $\mathbf{G}_{\mathcal{F}}$ était une composante de Levi du sous-groupe parabolique $\mathbf{P}_{\mathcal{F}'}$ et que $\mathbf{A}_{\mathcal{F}'}$ était le plus grand sous-tore déployé dans le centre de $\mathbf{M}_{\mathcal{F}'}$. Le tore $A^{\nu}_{\mathcal{F}}$ correspond de même à un sous-tore $\mathbf{A}^{\nu}_{\mathcal{F}}$ de $\mathbf{A}$. En appliquant la condition 4(9) à un élément de $Norm_{G(F)}(A) \cap K^{\nu}_{\mathcal{F}'}$, on voit que $\mathbf{A}^{\nu}_{\mathcal{F}}$ est le plus grand sous-tore déployé contenu dans le commutant de $\mathbf{M}^{\nu}_{\mathcal{F}'}$ dans $\mathbf{M}_{\mathcal{F}'}$. La théorie générale des espaces tordus nous dit que $\mathbf{M}_{\mathcal{F}'}$ est encore le commutant de $\mathbf{A}^{\nu}_{\mathcal{F}'}$ dans $\mathbf{G}_{\mathcal{F}}$. L'espace $\mathbf{M}^{\nu}_{\mathcal{F}'}(\mathbb{F}_q)$ s'identifie à $\mathbf{G}^{\nu}_{\mathcal{F}'}(\mathbb{F}_q)$. De nouveau, cette identification provient d'un isomorphisme algébrique $\mathbf{M}^{\nu}_{\mathcal{F}'} \simeq \mathbf{G}^{\nu}_{\mathcal{F}'}$.

6 Descente aux sous-groupes de Levi

Soit M un sous-groupe de Levi de G. Notons $M_{ad} = M/Z(G)$ l'image de M dans G_{AD}. L'immeuble $Imm(M_{ad})$ de ce groupe s'identifie à un sous-ensemble de $Imm(G_{AD})$, à savoir la réunion des appartements $App(A')$ pour les sous-tores déployés maximaux A' de M. L'action de $M(F)$ sur $Imm(M_{ad})$ est la restriction de celle sur $Imm(G_{AD})$. Par contre, la décomposition en facettes de $Imm(M_{ad})$ n'est pas celle de ce sous-ensemble, elle est moins fine. L'espace $\mathcal{A}_M/\mathcal{A}_G$ agit sur $Imm(M_{ad})$ car $\mathcal{A}_M$ est inclus dans $\mathcal{A}' = X_*(A') \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ pour tout tore A' comme ci-dessus. Le quotient de $Imm(M_{ad})$ par l'action de cet espace s'identifie à l'immeuble $Imm(M_{AD})$ du groupe adjoint de M. On note $p_M : Imm(M_{ad}) \to Imm(M_{AD})$ cette projection. Elle est équivariante pour les actions de $M(F)$. Pour tout tore A' comme ci-dessus, on note $App^M(A') = App(A')/(\mathcal{A}_M/\mathcal{A}_G)$ l'appartement de $Imm(M_{AD})$ associé à A' et on note encore $p_M : App(A') \to App^M(A')$ la projection. Elle est équivariante pour les actions de $Norm_{M(F)}(A')$.

De même que l'on a introduit le groupe $\mathcal{N} = \mathcal{N}^G$, cf. paragraphe 3, on introduit le groupe $\mathcal{N}^M$. Dire qu'un élément $m \in M(F)$ est compact modulo $Z(G)$, c'est-à-dire que l'image dans de m dans $G_{AD}(F)$ est contenue dans un sous-groupe compact de $G_{AD}(F)$, revient à dire que l'image m_{ad} de m dans $M_{ad}(F)$ est contenue dans un sous-groupe compact de $M_{ad}(F)$. Pour un tel élément, $w_{M_{ad}}(m_{ad})$ est de torsion. On a un homomorphisme naturel $\mathcal{N}^M \to \mathcal{N}^{M_{ad}}$. On note $\mathcal{N}^M_{G-comp}$ l'image réciproque par cet homomorphisme du sous-groupe de torsion de $\mathcal{N}^{M_{ad}}$ (remarquons que, si $M = G$, $\mathcal{N}^G_{G-comp} = \mathcal{N}^G$). De l'inclusion $Z(\hat{G}) \subset Z(\hat{M})$ se déduit un homomorphisme $\mathcal{N}^M \to \mathcal{N}^G$. Montrons que

(1) cet homomorphisme se restreint en un homomorphisme injectif $\mathcal{N}^M_{G-comp} \to \mathcal{N}^G$.

On introduit le revêtement simplement connexe $\hat{G}_{SC}$ du groupe dérivé de $\hat{G}$ et l'image réciproque $\hat{M}_{sc}$ de $\hat{M}$ dans $\hat{G}_{SC}$. Le groupe $\hat{G}_{SC}$, resp. $\hat{M}_{sc}$, est le groupe dual de G_{AD}, resp. M_{ad}. Des homomorphismes naturels

$$\begin{array}{ccc} Z(\hat{G})^I & & \\ & \searrow & \\ & & Z(\hat{M})^I \\ & \nearrow & \\ Z(\hat{M}_{sc})^I & & \end{array}$$

se déduisent des homomorphismes

$$\begin{array}{ccc} & & X^*(Z(\hat{G})^I) \\ & \nearrow & \\ X^*(Z(\hat{M})^I) & & \\ & \searrow & \\ & & X^*(Z(\hat{M}_{sc})^I) \end{array}$$

Les groupes $\mathcal{N}^M$, $\mathcal{N}^G$ et $\mathcal{N}^{M_{ad}}$ sont les sous-groupes de points fixes par Γ/I dans les groupes ci-dessus. Notons Y^* le sous-groupe des éléments de $X^*(Z(\hat{M})^I)$ qui s'envoient dans le sous-groupe de torsion de $X^*(Z(\hat{M}_{sc})^I)$. Alors $\mathcal{N}^M_{G-comp}$ est le sous-groupe des points fixes par Γ/I dans Y^*. Il suffit de démontrer que Y^* s'envoie injectivement dans $X^*(Z(\hat{G})^I)$. On introduit le groupe $\hat{M}_{ad} = \hat{M}/Z(\hat{G})$. On a une suite exacte

$$1 \to Z(\hat{G}) \to Z(\hat{M}) \to Z(\hat{M}_{ad}) \to 1$$

Parce que $X_*(Z(\hat{M}_{ad}))$ est un module galoisien induit, le groupe $Z(\hat{M}_{ad})^I$ est connexe. Donc la suite

$$1 \to Z(\hat{G})^I \to Z(\hat{M})^I \to Z(\hat{M}_{ad})^I \to 1$$

est encore exacte. D'où une suite exacte

$$0 \to X^*(Z(\hat{M}_{ad})^I) \to X^*(Z(\hat{M})^I) \to X^*(Z(\hat{G})^I) \to 0$$

On doit donc montrer que $Y^* \cap X^*(Z(\hat{M}_{ad})^I) = \{0\}$. On a l'égalité $\hat{M}_{ad} = \hat{M}_{sc}/Z(\hat{G}_{SC})$. On peut donc remplacer ci-dessus $\hat{M}$ et $\hat{G}$ par $\hat{M}_{sc}$ et $\hat{G}_{SC}$ et on a une suite exacte

$$0 \to X^*(Z(\hat{M}_{ad})^I) \to X^*(Z(\hat{M}_{sc})^I) \to X^*(Z(\hat{G}_{SC})^I) \to 0$$

Les premiers homomorphismes des deux suites ci-dessus sont injectifs et le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} & X^*(Z(\hat{M})^I) \arrow[d] \\ X^*(Z(\hat{M}_{ad})^I) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & X^*(Z(\hat{M}_{sc})^I) \end{tikzcd}$$

Un élément $y \in Y^* \cap X^*(Z(\hat{M}_{ad})^I)$ est un élément de $X^*(Z(\hat{M}_{ad})^I)$ qui s'envoie sur un élément de torsion dans $X^*(Z(\hat{M}_{sc})^I)$. D'après l'injectivité de la flèche sud-est ci-dessus, y est un élément de torsion dans $X^*(Z(\hat{M}_{ad})^I)$. Or $Z(\hat{M}_{ad})^I$ est connexe donc $X^*(Z(\hat{M}_{ad})^I)$ est sans torsion. Donc $y = 0$, ce qui prouve (1). $\square$

Grâce à (1), on identifie $\mathcal{N}^M_{G-comp}$ à un sous-groupe de $\mathcal{N} = \mathcal{N}^G$. A toute facette $\mathcal{F}_M$ de $Imm(M_{AD})$ est associé comme au paragraphe 3 un sous-groupe $\mathcal{N}^M(\mathcal{F}_M)$ de $\mathcal{N}^M$. On pose $\mathcal{N}^M_{G-comp}(\mathcal{F}_M) = \mathcal{N}^M(\mathcal{F}_M) \cap \mathcal{N}^M_{G-comp}$. L'ensemble $\bigcup_{\nu\in\mathcal{N}^M_{G-comp}(\mathcal{F}_M)} K^\nu_{\mathcal{F}_M}$ est un groupe dont l'image dans $M_{ad}(F)$ est compacte. On note $Fac^*(M)_{G-comp}$ l'ensemble des couples $(\mathcal{F}_M, \nu_M) \in Fac^*(M)$ tels que $\nu_M \in \mathcal{N}^M_{G-comp}$. On définit de même $Fac^*(M; A)_{G-comp}$. Un élément $m \in M(F)$ est compact modulo $Z(G)$ si et seulement s'il existe $(\mathcal{F}_M, \nu) \in Fac^*(M)_{G-comp}$ tel que $m \in K^\nu_{\mathcal{F}_M}$.

On suppose pour la suite de cette section que M contient A. Soit $(\mathcal{F}, \nu) \in Fac^*(G; A)$. L'image de $\mathcal{F}$ par la projection p_M est contenue dans une unique facette $\mathcal{F}^M$ de$App^M(A)$: $\mathcal{F}$ étant l'ensemble des $x \in App(A)$ vérifiant les relations (1) et (2) du paragraphe 4, $\mathcal{F}^M$ est l'ensemble des $x \in App^M(A)$ vérifiant

(2) $\alpha(x) = c_{\alpha,\mathcal{F}}$ pour $\alpha \in \Sigma_\mathcal{F} \cap \Sigma^M$;

(3) $c_{\alpha,\mathcal{F}} < \alpha(x) < c^+_{\alpha,\mathcal{F}}$ pour tout $\alpha \in \Sigma^M - \Sigma_\mathcal{F} \cap \Sigma^M$.

On a défini le groupe $M_{\mathcal{F},\nu}$ au paragraphe 5. Remarquons que, si ce groupe est contenu dans M, on a $\Sigma_\mathcal{F} \subset \Sigma^M$, ce qui simplifie les relations ci-dessus.

Lemme . *Soient $(\mathcal{F}, \nu) \in Fac^*(G; A)$ et M un sous-groupe de Levi de G contenant $M_{\mathcal{F},\nu}$. Alors* *(i) L'élément ν appartient à $\mathcal{N}^M_{G-comp}(\mathcal{F}^M)$.*

(ii) On a les égalités $K^+_{\mathcal{F}^M}=K^+_{\mathcal{F}}\cap M(F)$, $K^0_{\mathcal{F}^M}=K^0_{\mathcal{F}}\cap M(F)$, $K^\nu_{\mathcal{F}^M}=K^\nu_{\mathcal{F}}\cap M(F)$.

(iii) Soit $P\in\mathcal{P}(M)$, notons $\bar{P}$ le parabolique opposé. Alors le groupe $K^+_{\mathcal{F}}$ est produit de ses sous-groupes $K^+_{\mathcal{F}}\cap U_P(F)$, $K^+_{\mathcal{F}^M}$, et $K^+_{\mathcal{F}}\cap U_{\bar{P}}(F)$. Le groupe $K^0_{\mathcal{F}}$ est produit de ses sous-groupes $K^+_{\mathcal{F}}\cap U_P(F)$, $K^0_{\mathcal{F}^M}$, et $K^+_{\mathcal{F}}\cap U_{\bar{P}}(F)$. L'ensemble $K^\nu_{\mathcal{F}}$ est produit du groupe $K^+_{\mathcal{F}}\cap U_P(F)$, de l'ensemble $K^\nu_{\mathcal{F}^M}$ et du groupe $K^+_{\mathcal{F}}\cap U_{\bar{P}}(F)$. Ces produits possèdent les propriétés usuelles des décompositions "de type Iwahori".

(iv) $\mathcal{A}_{\mathcal{F}^M,\nu}=\mathcal{A}_{\mathcal{F},\nu}$ et $M_{\mathcal{F}^M,\nu}=M_{\mathcal{F},\nu}$;

(v) $\mathcal{F}$ est un sous-ensemble ouvert de $p_M^{-1}(\mathcal{F}^M)$;

(vi) $\mathcal{F}^\nu=\mathcal{F}\cap p_M^{-1}(\mathcal{F}^{M,\nu})$ et cet ensemble est ouvert dans $p_M^{-1}(\mathcal{F}^{M,\nu})$.

Preuve. Bruhat et Tits on défini un sous-groupe distingué $M_{min}(F)^+$ de $M_{min}(F)$ qui est pro-p-unipotent et tel que le groupe $K^+_{\mathcal{F}}$ soit le produit de $M_{min}(F)^+$ et des groupes radiciels $K^+_{\mathcal{F}}\cap U_\alpha(F)$. L'égalité $K^+_{\mathcal{F}^M}=K^+_{\mathcal{F}}\cap M(F)$ se déduit alors de la description des facettes $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^M$ et de 4(7). On obtient de même la décomposition en produit de (iii) du groupe $K^+_{\mathcal{F}}$.

Notons $M_{min}(F)^0$ le sous-groupe des $m\in M_{min}(F)$ tels que $w_{M_{min}}(m)=0$. Le groupe $K^0_{\mathcal{F}}$ est engendré par $M_{min}(F)^0$ et par les sous-groupes radiciels $K^0_{\mathcal{F}}\cap U_\alpha(F)$ (il ne s'agit plus d'une décomposition en produit). Il s'ensuit encore l'égalité $K^0_{\mathcal{F}^M}=K^0_{\mathcal{F}}\cap M(F)$ et la décomposition en produit de (iii) du groupe $K^0_{\mathcal{F}}$.

On a vu en 5(1) que $K^\nu_{\mathcal{F}}$ etait engendré par $K^0_{\mathcal{F}}$ et par un élément quelconque de $K^\nu_{\mathcal{F}}\cap Norm_{G(F)}(A)$. Fixons un tel élément n. D'après 5(2), n appartient à $M_{\mathcal{F},\nu}(F)$, a fortiori à $M(F)$, donc à $Norm_{M(F)}(A)$. L'action de n sur $Imm(G_{AD})$ conserve $\mathcal{F}$. D'après l'équivariance de p_M pour les actions de $Norm_{M(F)}(A)$, l'action de n sur $Imm(M_{AD})$ conserve $\mathcal{F}^M$. Donc $n\in K^\dagger_{\mathcal{F}^M}$. Puisque n appartient à $K^\dagger_{\mathcal{F}}$, son image dans $G_{AD}(F)$ est contenue dans un sous-groupe compact, donc son image dans $M_{ad}(F)$ vérifie la même propriété. Donc $w_M(n)$ appartient à $\mathcal{N}^M_{G-comp}$. Puisque l'image de $w_M(n)$ dans $\mathcal{N}$ est ν, cela entraîne que ν appartient à $\mathcal{N}^M_{G-comp}$ puis que $n\in K^\nu_{\mathcal{F}^M}$. Ces deux dernières propriétés entraînent le (i) de l'énoncé. Puisque n était un élément quelconque de $K^\nu_{\mathcal{F}}\cap Norm_{G(F)}(A)$, on vient de prouver que $K^\nu_{\mathcal{F}}\cap Norm_{G(F)}(A)\subset K^\nu_{\mathcal{F}^M}\cap Norm_{M(F)}(A)$. Puisque $K^\nu_{\mathcal{F}}$ est engendré par $K^0_{\mathcal{F}}$ et par un élément quelconque du premier ensemble et que, de même, $K^\nu_{\mathcal{F}^M}$ est engendré par $K^0_{\mathcal{F}^M}$ et par un élément quelconque du second, les assertions de (ii) et (iii) relatives à $K^\nu_{\mathcal{F}}$ se déduisent de celles déjà vues relatives à $K^0_{\mathcal{F}}$.

La facette $\mathcal{F}$ est l'ensemble des $x\in App(A)$ vérifiant les relations (1) et (2) du paragraphe 4 et $\mathcal{F}^M$ est l'ensemble des $x\in App^M(A)$ vérifiant les relations (2) et (3) ci-dessus (et on a $\Sigma_{\mathcal{F}}\subset\Sigma^M$). Par définition, $p_M^{-1}(\mathcal{F}^M)$ est l'ensemble des $x\in App(A)$ vérifiant ces relations (2) et (3). Donc $\mathcal{F}$ est le sous-ensemble de $p_M^{-1}(\mathcal{F}^M)$ défini par les relations

$c_{\alpha,\mathcal{F}}<\alpha(x)<c^+_{\alpha,\mathcal{F}}$ pour tout $\alpha\in\Sigma-\Sigma^M$.

Ces relations sont ouvertes. Donc $\mathcal{F}$ est un sous-ensemble ouvert de $p_M^{-1}(\mathcal{F}^M)$. Une racine $\alpha\in\Sigma^M$ qui est constante sur $\mathcal{F}^M$ est aussi constante sur $p_M^{-1}(\mathcal{F}^M)$ donc aussi sur $\mathcal{F}$. Inversement, soit $\alpha\in\Sigma$ qui est constante sur $\mathcal{F}$. Puisque M contient $M_{\mathcal{F},\nu}$, a fortiori contient $M_{\mathcal{F}}$, on a $\alpha\in\Sigma^M$. La valeur de α en un point de $App(A)$ est aussi sa valeur sur la projection de ce point dans $App^M(A)$. Donc α est constante sur la projection de $\mathcal{F}$. Or celle-ci est un ouvert non vide de $\mathcal{F}^M$. Donc α est constante sur $\mathcal{F}^M$. Cela démontre que l'ensemble des $\alpha\in\Sigma^M$ qui sont constantes sur $\mathcal{F}^M$ est égal à celui des $\alpha\in\Sigma$ qui sont constantes sur $\mathcal{F}$. Cela entraîne $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}=\mathcal{A}_{\mathcal{F}^M}$ et $M_{\mathcal{F}}=M_{\mathcal{F}^M}$.

Fixons $n \in Norm_{M(F)}(A) \cap K^{\nu}_{\mathcal{F}^M}$. D'après le (iii) déjà démontré, $\mathcal{F}^{\nu}$ est l'ensemble des points fixes dans $\mathcal{F}$ de l'action de n tandis que $\mathcal{F}^{M,\nu}$ est celui des points fixes dans $\mathcal{F}^M$ de l'action du même élément. Puisque la projection est équivariante pour l'action de n, la projection de $\mathcal{F}^{\nu}$ est incluse dans $\mathcal{F}^{M,\nu}$, c'est-à-dire $\mathcal{F}^{\nu} \subset p_M^{-1}(\mathcal{F}^{M,\nu})$. Fixons $x \in \mathcal{F}^{\nu}$ et soit $y \in p_M^{-1}(\mathcal{F}^{M,\nu}) \cap \mathcal{F}$. Parce que y se projette en un point de $\mathcal{F}^{M,\nu}$, on a $n(y) - y \in \mathcal{A}_M/\mathcal{A}_G$. Soit $e \in \mathcal{A}_M/\mathcal{A}_G$ tel que $n(y) - y = e$. Posons $f = y - x$ et notons w l'image de n dans W^M. Puisque $n(x) = x$, on a $w(f) = f + e$. Mais e appartient à l'espace des points fixes de l'action de w dans $\mathcal{A}/\mathcal{A}_G$ donc $w^k(f) = f + ke$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Puisque w est d'ordre fini, cela entraîne $e = 0$. Donc $n(y) = y$ et y appartient à $\mathcal{F}^{\nu}$. Cela prouve l'égalité du (vi) de l'énoncé. Puisque $\mathcal{F}$ est ouvert dans $p_M^{-1}(\mathcal{F}^M)$, son intersection avec le sous-ensemble $p_M^{-1}(\mathcal{F}^{M,\nu})$ est aussi ouverte dans ce sous-ensemble. Mais alors, les mêmes arguments que ci-dessus montrent que l'ensemble des $\alpha \in \Sigma^M$ qui sont constantes sur $\mathcal{F}^{M,\nu}$ est égal à celui des $\alpha \in \Sigma$ qui sont constantes sur $\mathcal{F}^{\nu}$. D'où le (iv) de l'énoncé. □

Une conséquence du lemme est que les deux espaces $K^{\nu}_{\mathcal{F}}/K^{+}_{\mathcal{F}} = \mathbf{G}^{\nu}_{\mathcal{F}}(\mathbb{F}_q)$ et $K^{\nu}_{\mathcal{F}^M}/K^{+}_{\mathcal{F}^M} = \mathbf{M}^{\nu}_{\mathcal{F}^M}(\mathbb{F}_q)$ sont naturellement isomorphes. De nouveau, on montre que cet isomorphisme ainsi que son analogue pour $\nu = 0$ proviennent d'isomorphismes algébriques compatibles $\mathbf{G}_{\mathcal{F}} \simeq \mathbf{M}_{\mathcal{F}^M}$, $\mathbf{G}^{\nu}_{\mathcal{F}} \simeq \mathbf{M}^{\nu}_{\mathcal{F}^M}$.

7 Relèvement de facettes de sous-groupes de Levi

Soit M un sous-groupe de Levi de G contenant A. Soit $(\mathcal{F}_M, \nu) \in Fac^*(M; A)_{G-comp}$. L'ensemble $p_M^{-1}(\mathcal{F}_M)$ est l'ensemble des $x \in App(A)$ qui vérifient les relations

$\alpha(x) = c_{\alpha,\mathcal{F}_M}$ pour tout $\alpha \in \Sigma^M_{\mathcal{F}_M}$;

$c_{\alpha,\mathcal{F}_M} < \alpha(x) < c^{+}_{\alpha,\mathcal{F}_M}$ pour tout $\alpha \in \Sigma^M - \Sigma^M_{\mathcal{F}_M}$.

Il est clair que c'est une réunion de facettes de $App(A)$.

Lemme . *(i) Pour toute facette $\mathcal{F} \in Fac(G; A)$ qui coupe $p_M^{-1}(\mathcal{F}^{\nu}_M)$, resp. $p_M^{-1}(\bar{\mathcal{F}}^{\nu}_M)$, on a $\nu \in \mathcal{N}(\mathcal{F})$ et $\mathcal{F}^{\nu} = \mathcal{F} \cap p_M^{-1}(\mathcal{F}^{\nu}_M)$, resp. $\mathcal{F}^{\nu} = \mathcal{F} \cap p_M^{-1}(\bar{\mathcal{F}}^{\nu}_M)$.*

(ii) Pour toute facette $\mathcal{F} \in Fac(G; A)$, les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) $\mathcal{F} \cap p_M^{-1}(\mathcal{F}^{\nu}_M)$ est un ouvert non vide de $p_M^{-1}(\mathcal{F}^{M,\nu})$;

(b) $\mathcal{F} \cap p_M^{-1}(\bar{\mathcal{F}}^{\nu}_M)$ est un ouvert non vide de $p_M^{-1}(\bar{\mathcal{F}}^{\nu}_M)$;

(c) $\nu \in \mathcal{N}(\mathcal{F})$, M contient $M_{\mathcal{F},\nu}$ et $\mathcal{F}^M = \mathcal{F}_M$.

Preuve. Fixons $n \in Norm_{M(F)}(A) \cap K^{\nu}_{\mathcal{F}_M}$. Les actions de n sur $App(A)$ et sur $App^M(A)$ sont compatibles. Donc l'action de n sur $App(A)$ conserve $p_M^{-1}(\mathcal{F}^{\nu}_M)$. Soit x dans cet ensemble. On a $n(x) = x + e$ avec $e \in \mathcal{A}_M/\mathcal{A}_G$. Puisque $n \in Norm_{M(F)}(A)$, son image dans W appartient à W^M et fixe tout point de $\mathcal{A}_M/\mathcal{A}_G$ Donc $n^k(x) = x + ke$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Parce que ν appartient à $\mathcal{N}(\mathcal{F}_M)_{G-comp}$, les images des n^k dans $M_{ad}(F)$, donc aussi leurs images dans $G_{AD}(F)$, restent dans un groupe compact. Il en résulte que les $n^k(x)$ restent dans un sous-ensemble compact de $App(A)$. Cela implique $e = 0$. Donc l'action de n fixe tout point de $p_M^{-1}(\mathcal{F}^{\nu}_M)$. Un point de $p_M^{-1}(\mathcal{F}_M)$ qui est fixe par n se projette forcément dans $\mathcal{F}^{\nu}_M$. Donc $p_M^{-1}(\mathcal{F}^{\nu}_M)$ est plus précisément le sous-ensemble des éléments de $p_M^{-1}(\mathcal{F}_M)$ qui sont fixes par n. Pour une facette $\mathcal{F} \in Fac(G; A)$ coupant $p_M^{-1}(\mathcal{F}^{\nu}_M)$, n fixe un point de $\mathcal{F}$ donc conserve cette facette, c'est-à-dire que $n \in K^{\dagger}_{\mathcal{F}}$. Puisque $w_G(n) = \nu$, on a $n \in K^{\nu}_{\mathcal{F}}$, a fortiori cet ensemble est non vide. D'autre part, puisque $p_M^{-1}(\mathcal{F}_M)$ est réunion de facettes, on a $\mathcal{F} \subset p_M^{-1}(\mathcal{F}_M)$. Donc $\mathcal{F}^{\nu}$, qui est l'ensemble des points fixes par l'action de n dans $\mathcal{F}$, est égal à $\mathcal{F}\cap p_M^{-1}(\mathcal{F}_M^\nu)$. Cela prouve les assertions du (i) de l'énoncé concernant $p_M^{-1}(\mathcal{F}_M^\nu)$. D'après 5(4), l'ensemble $\bar{\mathcal{F}}_M^\nu$ est réunion des $\mathcal{F}_{M,1}^\nu$ pour les facettes $\mathcal{F}_{M,1}$ de $Fac(M;A)$ telles que $\mathcal{F}_{M,1}\subset\bar{\mathcal{F}}_M$ et $\nu\in\mathcal{N}^M(\mathcal{F}_{M,1})$. Cette dernière condition équivaut à $\nu\in\mathcal{N}^M(\mathcal{F}_{M,1})_{G-comp}$ puisque $\nu\in\mathcal{N}^M_{G-comp}$. En appliquant ce que l'on vient de prouver à chacune de ces facettes, on obtient les assertions restantes de (i).

L'ensemble $p_M^{-1}(\mathcal{F}_M^\nu)$ est un ouvert dense de $p_M^{-1}(\bar{\mathcal{F}}_M^\nu)$. Cela entraîne que les conditions (a) et (b) du (ii) sont équivalentes. Soit $\mathcal{F}\in Fac(G;A)$ vérifiant le (a) du (ii). D'après le (i) déjà prouvé, on a $\nu\in\mathcal{N}(\mathcal{F})$ et $\mathcal{A}_\mathcal{F}^\nu/\mathcal{A}_G$ est engendré par les éléments $x-y$ pour $x,y\in\mathcal{F}\cap p_M^{-1}(\mathcal{F}_M^\nu)$. Puisque cet ensemble est ouvert dans $p_M^{-1}(\mathcal{F}_M^\nu)$ par hypothèse et puisque $p_M^{-1}(\mathcal{F}_M^\nu)$ est invariant par translation par $\mathcal{A}_M/\mathcal{A}_G$ par construction, l'ensemble de ces éléments $x-y$ contient un voisinage de 0 dans $\mathcal{A}_M/\mathcal{A}_G$. A fortiori le sous-espace engendré par ces éléments contient $\mathcal{A}_M/\mathcal{A}_G$, donc $\mathcal{A}_\mathcal{F}^\nu$ contient $\mathcal{A}_M$. Cela entraîne que M contient $M_{\mathcal{F},\nu}$. Par définition de la facette $\mathcal{F}^M$, la projection de $\mathcal{F}$ est contenue dans $\mathcal{F}^M$. Cette projection contient celle de $\mathcal{F}\cap p_M^{-1}(\mathcal{F}_M^\nu)$, laquelle est contenue dans $\mathcal{F}_M$. D'où l'égalité $\mathcal{F}^M=\mathcal{F}_M$, ce qui démontre que le (a) du (ii) implique le (c). La réciproque résulte du (vi) du lemme 6. $\square$

8 Distributions invariantes

Pour tout sous-groupe de Levi M de G, on fixe une mesure de Haar sur $M(F)$.

Notons $C_c^\infty(G(F))$ l'espace des fonctions sur $G(F)$, à valeurs complexes, localement constantes et à support compact. Pour $f\in C_c^\infty(G(F))$ et $g\in G(F)$, on note ${}^gf$ la fonction $x\mapsto f(g^{-1}xg)$ sur $G(F)$. On appelle distribution sur $G(F)$ une forme linéaire sur $C_c^\infty(G(F))$ et distribution invariante une telle forme linéaire D telle que $D({}^gf)=D(f)$ pour toute $f\in C_c^\infty(G(F))$ et tout $g\in G(F)$.

Soit M un sous-groupe de Levi de G. Fixons un sous-groupe parabolique $P\in\mathcal{P}(M)$ et munissons $U_P(F)$ d'une mesure de Haar. Pour $f\in C_c^\infty(G(F))$, on définit une fonction $f_{[P]}\in C_c^\infty(M(F))$ par $f_{[P]}(m)=\delta_P(m)^{1/2}\int_{U_P(F)}f(mu)\,du$ pour tout $m\in M(F)$, où δ_P est le module usuel. Fixons une facette spéciale $\mathcal{F}_{sp}\in Fac(G)$, posons $K_{sp}^0=K_{\mathcal{F}_{sp}}^0$. On a la décomposition $G(F)=M(F)U_P(F)K_{sp}^0$. Il existe une constante $c>0$ telle que l'on ait l'égalité

$$\int_{G(F)}f(g)\,dg=c\int_{M(F)\times U_P(F)\times K_{sp}^0}f(muk)\,dk\,du\,dm$$

pour tout $f\in C_c^\infty(G(F))$. Pour toute telle fonction, on définit $f_P\in C_c^\infty(M(F))$ par

$$f_P(m)=c\delta_P(m)^{1/2}\int_{U_P(F)\times K_{sp}^0}f(k^{-1}muk)\,dk\,du$$

$$=c\int_{K_{sp}^0}({}^kf)_{[P]}(m).$$

Cette fonction ne dépend pas de la mesure sur $U_P(F)$. Elle dépend de P et $\mathcal{F}_{sp}$ mais on sait que, pour toute distribution invariante D^M sur $M(F)$, $D^M(f_P)$ ne dépend pas de ces choix (par contre, ce terme dépend des mesures fixées sur $M(F)$ et $G(F)$). Pour toute telle distribution D^M, on définit la distribution induite $ind_M^G(D^M)$ à $G(F)$ par l'égalité

$$ind_M^G(D^M)(f)=D^M(f_P)$$

pour toute $f \in C_c^\infty(G(F))$. On peut formuler autrement cette définition. On oublie le groupe K_{sp}^0, on munit $P(F) = M(F)U_P(F)$ de la mesure produit et $P(F)\backslash G(F)$ de la mesure invariante à droite compatible avec celles fixées sur $P(F)$ et $G(F)$. Rappelons que cette mesure s'applique non pas à des fonctions invariantes à gauche par $P(F)$ mais à des fonctions φ sur $G(F)$ vérifiant $\varphi(mug) = \delta_P(m)\varphi(g)$ pour tous $m \in M(F)$, $u \in U_P(F)$ et $g \in G(F)$. Pour $f \in C_c^\infty(G(F))$, on a

$$ind_M^G(D^M)(f) = \int_{P(F)\backslash G(F)} D^M(({}^g f)_{[P]})\, dg.$$

9 Fonctions très cuspidales

Soit P un sous-groupe parabolique de G. Fixons une composante de Levi M de P et une mesure de Haar sur $U_P(F)$. Pour $f \in C_c^\infty(G(F))$, on a défini une fonction $f_{[P]}$ sur $M(F)$. Remarquons que la condition $f_{[P]} = 0$ ne dépend ni du choix de M, ni de celui de la mesure sur $U_P(F)$. On dit qu'une fonction $f \in C_c^\infty(G(F))$ est très cuspidale si $f_{[P]} = 0$ pour tout sous-groupe parabolique propre $P \subsetneq G$.

Soient $f, \varphi \in C_c^\infty(G(F))$. Pour $g \in G(F)$, posons

$$I(f, \varphi, g) = \int_{G(F)} f(g^{-1}xg)\varphi(x)\, dx.$$

Lemme. *Supposons φ très cuspidale. Alors l'image dans $A_G(F)\backslash G(F)$ du support de la fonction $g \mapsto I(f, \varphi, g)$ est compacte.*

Ce lemme est bien connu mais il est plus rapide d'en donner une démonstration que de trouver une référence. Auparavant, introduisons une notation qui nous sera utile dans la suite. Pour $P \in \mathcal{F}(M_{min})$, on note $\Sigma(U_P)$ le sous-ensemble des racines $\alpha \in \Sigma$ telles que $U_\alpha \subset U_P$. Si M est la composante de Levi de P contenant M_{min}, on note aussi Σ^M l'analogue de Σ quand on remplace G par M, autrement dit l'ensemble des $\alpha \in \Sigma$ tels que $U_\alpha \subset M$.

Preuve du lemme. Fixons un sous-groupe parabolique minimal $P_{min} \in \mathcal{P}(M_{min})$. On note $\Sigma^+ = \Sigma(U_{P_{min}})$ et $A(F)^+$ l'ensemble des $a \in A(F)$ tels que $|\alpha(a)|_F \geq 1$ pour tout $\alpha \in \Sigma^+$, où $|.|_F$ est la valeur absolue usuelle de F. On sait qu'il existe un sous-ensemble compact C de $G(F)$ tel que $G(F) = CA(F)^+C$. Puisque les ensembles de fonctions $\{{}^c f; c \in C\}$ et $\{{}^{c^{-1}}\varphi; c \in C\}$ sont finis et que ${}^{c^{-1}}\varphi$ est tout aussi cuspidale que φ, il suffit de prouver que le support de la fonction $a \mapsto I(f, \varphi, a)$ sur $A(F)^+$ est d'image compacte dans $A_G(F)\backslash A(F)^+$. Pour tout $P \in \mathcal{P}(M_{min})$ et tout entier $N > 0$, notons $A(F)^+(P, N)$ l'ensemble des $a \in A(F)^+$ tels que $|\alpha(a)|_F > N$ pour tout $\alpha \in \Sigma(U_P)$. Pour N fixé, l'ensemble $A_G(F)\backslash A(F)^+$ est réunion des $A_G(F)\backslash A(F)^+(P, N)$ quand P parcourt les sous-groupes paraboliques $P \in \mathcal{P}(M_{min})$ qui sont propres et maximaux, et d'un sous-ensemble compact. Il nous suffit donc de fixer $P \in \mathcal{P}(M_{min})$, $P \neq G$ et de prouver qu'il existe N tel que $I(f, \varphi, a) = 0$ pour tout $a \in A(F)^+(P, N)$. Fixons une facette spéciale $\mathcal{F}_{sp} \in Fac(G; A)$ et posons $K = K_{\mathcal{F}_{sp}}^0$. Fixons un sous-groupe ouvert et distingué K' de K tel que φ soit biinvariante par K' et que $K' = (K' \cap U_{\bar{P}}(F))(K' \cap P(F))$. Montrons que

(1) si N est assez grand, pour tout $a \in A(F)^+(P,N)$, le support de la fonction $x \mapsto f(a^{-1}xa)\varphi(x)$ est contenu dans $(K' \cap U_{\bar{P}}(F))P(F)$.

Posons $K^+ = K^+_{\mathcal{F}_{sp}}$, $\bar{U}^+_K = K^+ \cap U_{\bar{P}_{min}}(F)$, $M_{min,K} = K \cap M_{min}(F)$, $U_K = K \cap U_{P_{min}}(F)$. Pour tout $w \in W$, on peut relever w en un élément $n_w \in Norm_{G(F)}(A) \cap K$. L'image dans $\mathbf{G}^0_{\mathcal{F}_{sp}}(\mathbb{F}_q)$ de $M_{min,K}U_K$ est l'ensemble des points sur $\mathbb{F}_q$ d'un sous-groupe de Borel de $\mathbf{G}^0_{\mathcal{F}_{sp}}$. La décomposition de Bruhat dans $\mathbf{G}^0_{\mathcal{F}_{sp}}(\mathbb{F}_q)$ entraîne l'égalité $K = \cup_{w \in W} U_K \bar{U}^+_K n_w M_{min,K} U_K$. Il est également connu que $G(F) = KP_{min}(F)$. D'où $G(F) = \cup_{w \in W} U_K \bar{U}^+_K n_w M_{min}(F) U_{P_{min}}(F)$. Soit $x \in G(F)$ que l'on écrit $x = u\bar{u}n_w m_{min}u'$ conformément à cette décomposition. Supposons $\varphi(x) \neq 0$. Alors $m_{min}u'$ appartient au produit de K et du support de φ, qui est compact. Cela entraîne que m_{min}, resp. u', appartient à un certain sous-ensemble compact $C_{M_{min}} \subset M_{min}(F)$, resp. $C_{U_{min}} \subset U_{P_{min}}(F)$. Soit $a \in A(F)^+(P,N)$ et, pour tout $g \in G(F)$, posons $g^a = a^{-1}ga$. Alors $x^a = u^a \bar{u}^a a^{-1}w(a) n_w m^a_{min} u'^a$. Supposons que $f(x^a) \neq 0$. Alors x^a appartient au support de f. Parce que $a \in A(F)^+$, la conjugaison par a^{-1} contracte $U_{P_{min}}(F)$, fixe $M_{min}(F)$ et dilate $U_{\bar{P}_{min}}(F)$. Puisque u, m_{min} et u' sont respectivement dans les compacts U_K, $C_{M_{min}}$ et $C_{U_{min}}$, les éléments u^a, m^a_{min} et u'^a restent dans des compacts (on entend par là des compacts indépendants de x et a). Il en résulte que $\bar{u}^a a^{-1}w(a)$ reste dans un compact. Mais c'est un élément de $\bar{P}_{min}(F)$, donc les deux composantes $\bar{u}^a$ et $a^{-1}w(a)$ restent dans des compacts. On peut écrire $\bar{u} = \bar{u}_{\bar{P}} \bar{u}^{\bar{P}}$, où $\bar{u}_{\bar{P}} \in K^+ \cap U_{\bar{P}}(F)$ et $\bar{u}^{\bar{P}} \in K^+ \cap M(F) \cap U_{\bar{P}_{min}}(F)$. De nouveau, les deux composantes $\bar{u}^a_{\bar{P}}$ et $\bar{u}^{\bar{P},a}$ restent dans des compacts. Notons $C_{U_{\bar{P}}}$ le premier. Alors $\bar{u} \in aC_{U_{\bar{P}}}a^{-1}$. La conjugaison par a agit dans $U_{\bar{P}}(F)$ par des racines de valeurs absolues $< N^{-1}$ puisque $a \in A(F)^+(P,N)$. Si N est assez grand, on a donc $aC_{U_{\bar{P}}}a^{-1} \subset K' \cap U_{\bar{P}}(F)$. Il en résulte que $\bar{u}_{\bar{P}} \in K' \cap U_{\bar{P}}(F)$. Considérons maintenant la deuxième condition : $a^{-1}w(a)$ reste dans un compact. Il est bien connu qu'il existe un sous-groupe de Levi $L \in \mathcal{F}(M_{min})$ de sorte que l'ensemble des points fixes de w agissant sur $\mathcal{A}$ est $\mathcal{A}_L$ et que w appartienne à W^L. La condition "$a^{-1}w(a)$ reste dans un compact" entraîne qu'il existe un sous-ensemble compact C_A de $A(F)$ tel que a reste dans $A_L(F)C_A$. Pour toute racine $\alpha \in \Sigma^L$, $\alpha(a)$ reste donc dans un compact de $\mathbb{R}_{>0}$. Si N est assez grand, une telle racine ne peut intervenir ni dans U_P, ni dans $U_{\bar{P}}$ (car alors, on aurait $|\alpha(a)|_F > N$, resp. $|\alpha(a)|_F < N^{-1}$). Elle appartient donc à Σ^M, d'où l'inclusion $\Sigma^L \subset \Sigma^M$, puis $L \subset M$. Donc $w \in W^M$. On suppose N assez grand pour que les deux propriétés ci-dessus soient vérifiées. On a écrit $x = u\bar{u}n_w m_{min}u' = u\bar{u}_{\bar{P}}\bar{u}^{\bar{P}} n_w m_{min} u'$. On a vu que $\bar{u}_{\bar{P}}$ appartenait à $K' \cap U_{\bar{P}}(F)$. Les propriétés de K' entraînent que $u\bar{u}u^{-1}$ appartient à K' et peut s'écrire $u\bar{u}u^{-1} = \bar{u}'p$, avec $\bar{u}' \in K' \cap U_{\bar{P}}(F)$ et $p \in K' \cap P(F)$. Alors $x = \bar{u}'pun_w m_{min}u'$. Le premier terme est dans $K' \cap U_{\bar{P}}(F)$ et tous les autres appartiennent à $P(F)$. Cela démontre (1).

On peut fixer des mesures sur $U_{\bar{P}}(F)$ et $U_P(F)$ de sorte que l'on ait l'égalité

$$\int_{G(F)} f(a^{-1}xa)\varphi(x)\,dx = \int_{U_{\bar{P}}(F)\times M(F)\times U_P(F)} f(a^{-1}\bar{u}mua)\varphi(\bar{u}mu)\delta_P(m)\,d\bar{u}\,dm\,du.$$

Supposons N assez grand pour que (1) soit vérifiée. On peut alors restreindre l'intégration sur $U_{\bar{P}}(F)$ en une intégration sur $K' \cap U_{\bar{P}}(F)$. Puisque φ est invariante par ce groupe, on a alors $\varphi(\bar{u}mu) = \varphi(mu)$. Il existe des compacts $C_M \subset M(F)$ et $C_{U_P} \subset U_P(F)$ tels que $\varphi(mu) \neq 0$ entraîne $m \in C_M$ et $u \in C_{U_P}$. On a alors

$$\int_{G(F)} f(a^{-1}xa)\varphi(x)\,dx = \int_{K'\cap U_{\bar{P}}(F)\times C_M\times C_{U_P}} f(a^{-1}\bar{u}mua)\varphi(mu)\,d\bar{u}\,dm\,du.$$

Quand N est assez grand, $a^{-1}C_{U_P}a$ est aussi petit que l'on veut. On peut donc supposer que f est invariante à droite par $a^{-1}C_{U_P}a$. Alors $f(a^{-1}\bar{u}mua)=f(a^{-1}\bar{u}ma)$. Mais alors, dans la formule ci-dessus, on voit apparaître l'intégrale

$$\int_{C_{U_P}}\varphi(mu)\,du,$$

qui n'est autre que

$$\int_{U_P(F)}\varphi(mu)\,du$$

par définition de C_{U_P}. Or cette dernière intégrale est nulle puisque φ est très cuspidale. Cela achève la démonstration. $\square$

Fixons une mesure de Haar sur $A_G(F)$. Soit $\varphi\in C_c^\infty(G(F))$, supposons φ très cuspidale. Le lemme permet d'associer à φ la distribution D_φ définie par

$$D_\varphi(f)=\int_{A_G(F)\backslash G(F)}\int_{G(F)}f(g^{-1}xg)\varphi(x)\,dx\,dg$$

pour toute $f\in C_c^\infty(G(F))$ (cette définition est similaire à celle de [8] paragraphe 3.2). C'est une distribution invariante.

Soit $M\in\mathcal{L}(M_{min})$. On fixe sur $A_M(F)$ la mesure de Haar telle que la mesure du plus grand sous-groupe compact $A_M(F)^c$ de ce groupe vaille 1. Notons $\mathcal{A}_M^*$ l'espace vectoriel réel dual de $\mathcal{A}_M$. Il existe un réseau $R_M\subset\mathcal{A}_M^*$ tel que $i\mathcal{A}_M^*/iR_M$ s'identifie au groupe des caractères unitaires de $A_M(F)/A_M(F)^c$. On munit $\mathcal{A}_M^*$ de la mesure de Haar telle que la mesure de $\mathcal{A}_M^*/R_M$ vaille 1. Notons $M(F)_{ell}$ l'ensemble des éléments semi-simples fortement réguliers de $M(F)$ qui sont elliptiques, c'est-à-dire contenus dans un sous-tore maximal T de M tel que $A_T=A_M$. Fixons une facette spéciale $\mathcal{F}_{sp}\subset App(A)$ et posons $K_{sp}^0=K_{\mathcal{F}_{sp}}^0$. Pour une fonction $f\in C_c^\infty(G(F))$ et pour $x\in M(F)_{ell}$, on définit l'intégrale orbitale pondérée

$$J_M^G(x,f)=D^G(x)^{1/2}\int_{A_M(F)\backslash G(F)}f(g^{-1}xg)v_M^G(g)\,dg,$$

où D^G est un déterminant usuel et v_M^G est le poids défini par Arthur à l'aide du groupe K_{sp}^0 et de la mesure fixée sur $\mathcal{A}_M^*/\mathcal{A}_G^*$. La fonction $x\mapsto J_M^G(x,f)$ est invariante par conjugaison par $M(F)$. Dans le cas où f est très cuspidale, on sait que cette fonction est indépendante du choix de $\mathcal{F}_{sp}$, cf. [4] lemme 5.2.1.

Soit $\varphi\in C_c^\infty(G(F))$, supposons φ très cuspidale. La formule des traces locale ([3]) permet de récrire la définition de la distribution D_φ sous la forme suivante :

$$(1)\qquad D_\varphi(f)=\sum_{M\in\mathcal{L}(M_{min})}|W^M||W|^{-1}(-1)^{dim(A_M)-dim(A_G)}\int_{M(F)_{ell}}f_{P_M}(m)J_M^G(m,\varphi)\,dm,$$

où, pour tout M, on a fixé un élément quelconque $P_M\in\mathcal{P}(M)$.

10 Représentations de niveau 0 et fonctions cuspidales associées

Soit π une représentation admissible de $G(F)$ dans un espace complexe V. On suppose que π est de longueur finie et de niveau 0, ce qui signifie que V est engendré par les sous-espaces d'invariants $V^{K_{\mathcal{F}}^+}$ pour $\mathcal{F} \in Fac(G)$. On conservera cette représentation jusqu'à la fin de l'article.

Pour toute facette $\mathcal{F} \in Fac(G)$, notons $V^{K_{\mathcal{F}}^+}$ le sous-espace des éléments de V qui sont invariants par $K_{\mathcal{F}}^+$. Il est de dimension finie. La restriction de π au groupe $K_{\mathcal{F}}^\dagger$ conserve cet espace. Il s'en déduit une représentation de dimension finie du groupe $K_{\mathcal{F}}^\dagger/K_{\mathcal{F}}^+ = \sqcup_{\nu \in \mathcal{N}(\mathcal{F})} \mathbf{G}_{\mathcal{F}}^\nu(\mathbb{F}_q)$. On note $\pi_{\mathcal{F}}$ cette représentation et $trace\, \pi_{\mathcal{F}}$ son caractère habituel. Soit $\nu \in \mathcal{N}(\mathcal{F})$. La fonction $trace\, \pi_{\mathcal{F}}$ se restreint à $\mathbf{G}_{\mathcal{F}}^\nu(\mathbb{F}_q)$ en un élément de $C^{inv}(\mathbf{G}_{\mathcal{F}}^\nu)$ que l'on note $\phi_{\mathcal{F},\nu}$ (ou plus précisément $\phi_{\pi,\mathcal{F},\nu}$). On note $\phi_{\mathcal{F},\nu,cusp}$ sa projection cuspidale dans $C_{cusp}^{inv}(\mathbf{G}_{\mathcal{F}}^\nu)$. Soit $\mathcal{F}'$ une facette dont l'adhérence contient $\mathcal{F}$ et telle que $\nu \in \mathcal{N}(\mathcal{F}')$. Il correspond à $\mathcal{F}'$ un sous-espace parabolique $\mathbf{P}_{\mathcal{F}'}^\nu$ de $\mathbf{G}_{\mathcal{F}}^\nu$. Une composante de Levi $\mathbf{M}_{\mathcal{F}'}^\nu$ de cet espace s'identifie à $\mathbf{G}_{\mathcal{F}'}^\nu$. Modulo cette identification, on vérifie que

(1) $\phi_{\mathcal{F}',\nu} = res_{\mathbf{M}_{\mathcal{F}'}^\nu}^{\mathbf{G}_{\mathcal{F}}^\nu}(\phi_{\mathcal{F},\nu})$.

Soit M un sous-groupe de Levi de G. Soit $P \in \mathcal{P}(M)$. On définit le module de Jacquet V_P, quotient de V par le sous-espace engendré par les $\pi(u)(v) - v$ pour $v \in V$ et $u \in U_P(F)$. On définit la représentation π_P de $M(F)$ dans V_P de sorte que, pour $m \in M(F)$ et $v \in V$, la projection de $\pi(m)(v)$ dans V_P soit $\delta_P(m)^{1/2}\pi_P(m)(v_P)$, où v_P est la projection de v. Ainsi, pour tout $(\mathcal{F}_M, \nu_M) \in Fac^*(M)$, on définit des fonctions $\phi_{\pi_P,\mathcal{F}_M,\nu_M}$ et $\phi_{\pi_P,\mathcal{F}_M,\nu_M,cusp}$ sur $\mathbf{M}_{\mathcal{F}_M}^{\nu_M}(\mathbb{F}_q)$. Supposons $\nu_M \in \mathcal{N}_{G-comp}^M$, notons simplement ν cet élément. Choisissons une facette $\mathcal{F} \in Fac(G)$ telle que $\mathcal{F}$ coupe $p_M^{-1}(\mathcal{F}_M^\nu)$ selon un ensemble ouvert. D'après les lemmes 7 et 6 (que l'on peut appliquer car on ne perd rien à supposer que $A \subset M$ et $\mathcal{F} \subset App(A)$), ν appartient à $\mathcal{N}(\mathcal{F})$ et on a un isomorphisme canonique $\mathbf{G}_{\mathcal{F}}^\nu(\mathbb{F}_q) \simeq \mathbf{M}_{\mathcal{F}_M}^\nu(\mathbb{F}_q)$. Les fonctions $\phi_{\pi,\mathcal{F},\nu}$ et $\phi_{\pi,\mathcal{F},\nu,cusp}$ peuvent être considérées comme des fonctions sur ce dernier groupe $\mathbf{M}_{\mathcal{F}_M}^\nu(\mathbb{F}_q)$. Montrons que

(2) on a les égalités $\phi_{\pi,\mathcal{F},\nu} = \phi_{\pi_P,\mathcal{F}_M,\nu}$ et $\phi_{\pi,\mathcal{F},\nu,cusp} = \phi_{\pi_P,\mathcal{F}_M,\nu,cusp}$.

Preuve. D'après Moy et Prasad, la projection de V dans V_P se restreint en un isomorphisme de $V^{K_{\mathcal{F}}^+}$ sur $V_P^{K_{\mathcal{F}_M}^+}$, cf. [13] proposition 6.7. Si on oublie le δ_P de la définition du module de Jacquet, cet isomorphisme entrelace l'action de $\mathbf{G}_{\mathcal{F}}^\nu(\mathbb{F}_q)$ sur le premier espace et celle de $\mathbf{M}_{\mathcal{F}_M}^\nu(\mathbb{F}_q)$ sur le second. Mais le δ_P vaut 1 sur $K_{\mathcal{F}}^\nu \cap M(F)$ car l'image dans $M_{ad}(F)$ d'un élément de cet ensemble est contenu dans un sous-groupe compact. La première égalité de (2) s'en déduit. La seconde se déduit de la première par projection cuspidale. $\square$

En conséquence,

(3) les fonctions $\phi_{\pi,\mathcal{F},\nu}$ et $\phi_{\pi,\mathcal{F},\nu,cusp}$ ci-dessus ne dépendent pas du choix de $\mathcal{F}$ et les fonctions $\phi_{\pi_P,\mathcal{F}_M,\nu}$ et $\phi_{\pi_P,\mathcal{F}_M,\nu,cusp}$ ne dépendent pas du choix de P.

On notera simplement $\phi_{\pi,\mathcal{F}_M,\nu}$ et $\phi_{\pi,\mathcal{F}_M,\nu}$, ou encore plus simplement $\phi_{\mathcal{F}_M,\nu}$ et $\phi_{\mathcal{F}_M,\nu,cusp}$ ces fonctions.

Soient M un sous-groupe de Levi de G et $g \in G(F)$. Posons $M' = gMg^{-1}$. L'action de g sur l'immeuble $Imm(G_{AD})$ envoie $Imm(M_{ad})$ sur $Imm(M'_{ad})$ et elle se descend en une bijection de $Imm(M_{AD})$ sur $Imm(M'_{AD})$ qui est compatible aux décompositions en facettes de ces immeubles. Soit $(\mathcal{F}_M, \nu) \in Fac^*(M)_{G-comp}$ et notons $\mathcal{F}_{M'} = g(\mathcal{F}_M)$ l'image de $\mathcal{F}_M$ par cette bijection. Il est clair que $(\mathcal{F}_{M'}, \nu) \in Fac^*(M')_{G-comp}$ et que, de la conjugaison par g se déduit un isomorphisme $\mathbf{M}_{\mathcal{F}_M}^\nu(\mathbb{F}_q) \simeq \mathbf{M'}_{\mathcal{F}_{M'}}^\nu(\mathbb{F}_q)$. On a

(4) cet isomorphisme transporte les fonctions $\phi_{\mathcal{F}_M,\nu}$ et $\phi_{\mathcal{F}_M,\nu,cusp}$ en les fonctions $\phi_{\mathcal{F}_{M'},\nu}$ et $\phi_{\mathcal{F}_{M'},\nu,cusp}$.

En effet, si on "relève" $\mathcal{F}_M$ en $\mathcal{F}$ comme ci-dessus, on peut relever $\mathcal{F}_{M'}$ en $\mathcal{F}' = g(\mathcal{F})$. De la conjugaison par g se déduit un isomorphisme $\mathbf{G}^{\nu}_{\mathcal{F}}(\mathbb{F}_q) \simeq \mathbf{G}^{\nu}_{\mathcal{F}'}(\mathbb{F}_q)$. Celui-ci transporte la fonction $\phi_{\mathcal{F},\nu}$ en la fonction $\phi_{\mathcal{F}',\nu}$ parce que l'opérateur $\pi(g)$ entrelace les représentations $\pi_{\mathcal{F}}$ et $\pi_{\mathcal{F}'}$. L'assertion (3) résulte alors de (2). $\square$

Pour $(\mathcal{F},\nu) \in Fac^*(G)$, on a défini ci-dessus des fonctions $\phi_{\mathcal{F},\nu}$ et $\phi_{\mathcal{F},\nu,cusp}$ sur l'espace $\mathbf{G}^{\nu}_{\mathcal{F}}(\mathbb{F}_q)$. Dans la suite, on les considérera la plupart du temps comme des fonctions sur $G(F)$, à support dans $K^{\nu}_{\mathcal{F}}$ et biinvariantes par $K^+_{\mathcal{F}}$. Notons $Fac^*_{max}(G)$ l'ensemble des $(\mathcal{F},\nu) \in Fac^*(G)$ tels que $\mathcal{F}^{\nu}$ est réduit à un point.

Lemme. *Soit $(\mathcal{F},\nu) \in Fac^*_{max}(G)$. Alors la fonction $\phi_{\mathcal{F},\nu,cusp}$ est très cuspidale.*

Preuve (cf. [8] paragraphe 3.2). On peut supposer $\mathcal{F} \subset App(A)$. Fixons une facette ouverte $\mathcal{F}_{min} \subset App(A)$ dont l'adhérence contient $\mathcal{F}$. Comme on le sait, on peut fixer une facette spéciale $\mathcal{F}_{sp}$ contenue dans l'adhérence de $\mathcal{F}_{min}$. On note $K^0_{sp} = K^0_{\mathcal{F}_{sp}}$, $K^+_{sp} = K^+_{\mathcal{F}_{sp}}$ et $K^0_{min} = K^0_{\mathcal{F}_{min}}$. Le groupe K^0_{min} est contenu dans K^0_{sp} et il existe une unique sous-groupe parabolique $P_{min} \in \mathcal{P}(M_{min})$ de sorte que $K^0_{min} = (K^0_{sp} \cap P_{min}(F))K^+_{sp}$. Soit P un sous-groupe parabolique propre de G. On peut fixer $g \in G(F)$ tel que $g^{-1}(P)$ contient P_{min}. On sait que $G(F) = K^0_{sp}P_{min}(F)$. On peut donc supposer $g \in K^0_{sp}$. On a la décomposition $K^0_{sp} = \cup_{w\in W} K^0_{min} n_w K^0_{min}$ où, pour tout $w \in W$, n_w est un relèvement de w dans $K^0_{sp} \cap Norm_{G(F)}(A)$. En vertu de l'égalité $K^0_{min} = (K^0_{sp} \cap P_{min}(F))K^+_{sp}$, on a aussi bien $K^0_{sp} = \cup_{w\in W} K^0_{min} n_w (K^0_{sp} \cap P_{min}(F))$. Puisque l'on peut multiplier g à droite par un élément de $P_{min}(F)$, on peut donc supposer $g = kn_w$ pour un $w \in W$ et un $k \in K^0_{min}$. En posant $Q = k^{-1}(P)$, on a alors $Q \in \mathcal{F}(M_{min})$. Notons L la composante de Levi de Q contenant M_{min} et $M = k(L)$. Pour $m \in M(F)$, on a $\phi_{\mathcal{F},\nu,cusp,[P]}(m) = \int_{U_Q(F)} \phi_{\mathcal{F},\nu,cusp}(kluk^{-1})\,du$, où $l = k^{-1}mk$. Mais $K^0_{min} \subset K^0_{\mathcal{F}}$ et la fonction $\phi_{\mathcal{F},\nu,cusp}$ est invariante par conjugaison par ce groupe. On obtient que la relation $\phi_{\mathcal{F},\nu,cusp,[P]} = 0$ équivaut à $\phi_{\mathcal{F},\nu,cusp,[Q]} = 0$. Autrement dit, en oubliant cette construction, on peut supposer que P et M contiennent M_{min}. Dans ce cas, P détermine un sous-groupe parabolique $\mathbf{P}$ de $\mathbf{G}_{\mathcal{F}}$ de sorte que l'image de $P(F) \cap K^0_{\mathcal{F}}$ dans $\mathbf{G}_{\mathcal{F}}(\mathbb{F}_q)$ soit $\mathbf{P}(\mathbb{F}_q)$. On veut prouver que $\phi_{\mathcal{F},\nu,cusp,[Q]} = 0$. Puisque $\phi_{\mathcal{F},\nu,cusp}$ est à support dans $K^{\nu}_{\mathcal{F}}$, c'est clair si cet ensemble ne coupe pas $P(F)$. Supposons donc que $P(F) \cap K^{\nu}_{\mathcal{F}} \neq \emptyset$. Dans ce cas, il existe un sous-espace parabolique $\mathbf{P}^{\nu}$ de $\mathbf{G}^{\nu}_{\mathcal{F}}$ tel que l'image de $P(F) \cap K^{\nu}_{\mathcal{F}}$ dans $\mathbf{G}^{\nu}_{\mathcal{F}}(\mathbb{F}_q)$ soit $\mathbf{P}^{\nu}(\mathbb{F}_q)$. On voit qu'il existe un espace de Levi $\mathbf{M}^{\nu}$ de $\mathbf{P}^{\nu}$ de sorte que la fonction $\phi_{\mathcal{F},\nu,cusp,[Q]}$ s'identifie à $res^{\mathbf{G}^{\nu}_{\mathcal{F}}}_{\mathbf{M}^{\nu}}(\phi_{\mathcal{F},\nu,cusp})$, à une constante près provenant des mesures, où ici, $\phi_{\mathcal{F},\nu,cusp}$ est vue comme une fonction sur $\mathbf{G}^{\nu}_{\mathcal{F}}(\mathbb{F}_q)$. La nullité cherchée résulte de la cuspidalité de cette fonction pourvu que $\mathbf{P}^{\nu}$ soit un sous-espace parabolique propre. Mais supposons que $\mathbf{P}^{\nu} = \mathbf{G}^{\nu}_{\mathcal{F}}$. Alors $K^{\nu}_{\mathcal{F}} = (P(F) \cap K^{\nu}_{\mathcal{F}})K^+_{\mathcal{F}}$. On sait que $K^+_{\mathcal{F}} = (P(F) \cap K^+_{\mathcal{F}})(U_{\bar{P}}(F) \cap K^+_{\mathcal{F}})$ (où $\bar{P}$ est le groupe contenant M et opposé à P). On a donc $K^{\nu}_{\mathcal{F}} = (P(F) \cap K^{\nu}_{\mathcal{F}})(U_{\bar{P}}(F) \cap K^+_{\mathcal{F}})$. Considérons $n \in K^{\nu}_{\mathcal{F}} \cap Norm_{G(F)}(A)$. L'égalité précédente entraîne $n \in P(F)U_{\bar{P}}(F)$. Mais l'intersection de $P(F)U_{\bar{P}}(F)$ et de $Norm_{G(F)}(A)$ est $Norm_{M(F)}(A)$. Donc $n \in M(F)$. Introduisons le sous-tore $\mathbf{A}$ de $\mathbf{G}^0_{\mathcal{F}}$ comme en 4(8) et (9) et identifions $\mathcal{A}$ à $X_*(\mathbf{A}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. L'égalité $\mathbf{P}^{\nu} = \mathbf{G}^{\nu}_{\mathcal{F}}$ entraîne que l'image de $M(F) \cap K^0_{\mathcal{F}}$ dans $\mathbf{G}_{\mathcal{F}}(\mathbb{F}_q)$ est ce groupe tout entier. Donc $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ contient $\mathcal{A}_M$. Rappelons que $\mathcal{A}^{\nu}_{\mathcal{F}}$ est l'ensemble des points fixes de l'action de $\mathbf{n}$ dans $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$. Puisque $n \in M(F)$, cette action est triviale sur $\mathcal{A}_M$ donc $\mathcal{A}^{\nu}_{\mathcal{F}}$ contient $\mathcal{A}_M$. Or $\mathcal{A}_M \neq \mathcal{A}_G$ puisque

P est propre alors que $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}^{\nu} = \mathcal{A}_G$ d'après l'hypothèse que $\mathcal{F}^{\nu}$ est réduit à un point. Cette contradiction achève la preuve. $\square$

11 Définition de distributions

Fixons un sous-ensemble $\underline{Fac}_{max}^*(G)$ des classes de conjugaison par $G(F)$ dans $Fac_{max}^*(G)$.

Lemme. *Soit $f \in C_c^{\infty}(G(F))$. Alors l'ensemble des $(\mathcal{F},\nu) \in Fac_{max}^*(G)$ telles que l'intégrale*

$$\int_{G(F)} f(x)\phi_{\mathcal{F},\nu,cusp}(x)\,dx$$

soit non nulle est fini.

Preuve (cf. [8]). On peut évidemment se limiter aux $(\mathcal{F},\nu)$ tels que ν appartienne à l'image finie du support de f par l'application w_G. Ces éléments sont contenus dans un ensemble fini de classes de conjugaison par $G(F)$. On peut donc fixer $(\underline{\mathcal{F}},\nu) \in \underline{Fac}_{max}^*(G)$ et se limiter à l'ensemble des $(g^{-1}(\underline{\mathcal{F}}),\nu)$ pour $g \in G(F)$, ou encore $g \in K_{\underline{\mathcal{F}}}^{\dagger}\backslash G(F)$. Mais $\phi_{g^{-1}(\underline{\mathcal{F}}),\nu,cusp}(x) = \phi_{\underline{\mathcal{F}},\nu,cusp}(gxg^{-1})$, donc

$$\int_{G(F)} f(x)\phi_{g^{-1}(\underline{\mathcal{F}}),\nu,cusp}(x)\,dx = I(f,\phi_{\underline{\mathcal{F}},\nu,cusp},g)$$

avec la notation du paragraphe 9. D'après les lemmes 9 et 10, L'ensemble des g tels que ce terme soit non nul est compact modulo $A_G(F)$, donc fini modulo $K_{\underline{\mathcal{F}}}^{\dagger}$. Cela prouve le lemme. $\square$

On définit une distribution invariante $\Theta_{\pi,cusp}$ par

$$\Theta_{\pi,cusp}(f) = \sum_{(\mathcal{F},\nu)\in Fac_{max}^*(G)} \int_{G(F)} f(x)\phi_{\mathcal{F},\nu,cusp}(x)\,dx.$$

Grâce au lemme 10, on peut définir comme au paragraphe 9 une distribution $D_{\phi_{\mathcal{F},\nu,cusp}}$ pour tout $(\mathcal{F},\nu) \in Fac_{max}^*(G)$. Il résulte de la preuve ci-dessus que, pour tout $f \in C_c^{\infty}(G(F))$, l'ensemble des $(\mathcal{F},\nu) \in \underline{Fac}_{max}^*(G)$ tels que $D_{\phi_{\mathcal{F},\nu,cusp}}(f) \neq 0$ est fini qu'on a l'égalité

$$(1) \qquad \Theta_{\pi,cusp}(f) = \sum_{(\mathcal{F},\nu)\in \underline{Fac}_{max}^*(G)} mes(A_G(F)\backslash K_{\mathcal{F}}^{\dagger})^{-1} D_{\phi_{\mathcal{F},\nu,cusp}}(f).$$

Soit M un sous-groupe de Levi de G. Fixons un sous-groupe parabolique $P \in \mathcal{P}(M)$. On définit comme ci-dessus la distribution $\Theta_{\pi_P,cusp}$ sur $M(F)$. On définit de façon évidente les ensembles $Fac_{max}^*(M)_{G-comp}$ et $\underline{Fac}_{max}^*(M)_{G-comp}$. On définit une autre distribution $\Theta_{\pi,cusp}^M$ sur $M(F)$ par

$$\Theta_{\pi,cusp}^M(f) = \sum_{(\mathcal{F}_M,\nu)\in Fac_{max}^*(M)_{G-comp}} \int_{M(F)} f(x)\phi_{\mathcal{F}_M,\nu,cusp}(x)\,dx$$

pour $f \in C_c^{\infty}(M(F))$. Le groupe P n'intervient pas dans cette définition. On a

(2) soit $f \in C_c^\infty(M(F))$; si le support de f est formé d'éléments compacts modulo $Z(G)$, on a l'égalité $\Theta^M_{\pi_P,cusp}(f) = \Theta^M_{\pi,cusp}(f)$.

En effet, pour $(\mathcal{F}_M, \nu_M) \in Fac^*_{max}(M)$ tel que $\nu_M \notin \mathcal{N}^M_{G-comp}$, le support de $\phi_{\pi_P,\mathcal{F}_M,\nu_M,cusp}$ est formé d'éléments qui ne sont pas compacts modulo $Z(G)$. Pour une fonction f comme ci-dessus, l'intégrale

$$\int_{M(F)} f(x)\phi_{\pi_P,\mathcal{F}_M,\nu,cusp}(x)\, dx$$

est donc nulle. Et si $\nu_M \in \mathcal{N}^M_{G-comp}$, les fonctions $\phi_{\pi_P,\mathcal{F}_M,\nu_M,cusp}$ et $\phi_{\mathcal{F}_M,\nu_M,cusp}$ sont égales d'après 10(2).

12 Le théorème principal

On définit le caractère-distribution de π par $\Theta_\pi(f) = trace\, \pi(f)$ pour tout $f \in C_c^\infty(G(F))$.

Théorème. *Soit $f \in C_c^\infty(G(F))$. Supposons que le support de f soit formé d'éléments compacts modulo $Z(G)$. Alors on a l'égalité*

$$\Theta_\pi(f) = \sum_{M \in \mathcal{L}(M_{min})} |W^M||W^G|^{-1} ind_M^G(\Theta^M_{\pi,cusp})(f).$$

La démonstration de ce théorème occupe les paragraphes 13 à 17.

13 Résolutions de Schneider-Stuhler et Mayer-Solleveld

D'après Schneider et Stuhler, on dispose d'une résolution de V :

$$(1) \qquad 0 \to C_n \to C_{n-1} \to ... \to C_0 \stackrel{\delta_0}{\to} V$$

dont nous allons rappeler la définition, cf. [14] théorème II.3.1. Pour $i = 0, ..., n$, C_i est la somme directe sur les facettes $\mathcal{F} \in Fac(G)$ telles que $dim(\mathcal{F}) = i$ des espaces d'invariants $V^{K^\dagger_\mathcal{F}}$. L'homomorphisme $C_0 \to V$ est la somme des inclusions $V^{K^\dagger_\mathcal{F}} \subset V$. Pour définir l'homomorphisme $C_i \to C_{i-1}$ pour $i > 0$, on munit arbitrairement chaque facette de dimension positive d'une orientation. Autrement dit, $E_\mathcal{F} = \mathcal{A}_\mathcal{F}/\mathcal{A}_G$ étant un espace vectoriel réel supportant $\mathcal{F}$, on choisit une demi-droite dans la droite réelle $\bigwedge^{dim(\mathcal{F})}(E_\mathcal{F})$. Si $dim(\mathcal{F}) > 1$, l'orientation de $\mathcal{F}$ détermine une orientation de toute facette $\mathcal{F}'$ de dimension $dim(\mathcal{F}) - 1$ dans l'adhérence de $\mathcal{F}$, d'où un signe $\epsilon_{\mathcal{F},\mathcal{F}'}$ qui vaut 1 si cette orientation est celle fixée pour $\mathcal{F}'$ et -1 dans le cas contraire. Si $dim(\mathcal{F}) = 1$ et $\mathcal{F}'$ est l'un des deux points limites de $\mathcal{F}$, $\epsilon_{\mathcal{F},\mathcal{F}'}$ vaut 1 si l'orientation de $\mathcal{F}$ pointe dans la direction de $\mathcal{F}'$ et -1 dans le cas contraire. D'autre part, pour $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ comme ci-dessus, on a $K^\dagger_{\mathcal{F}'} \subset K^\dagger_\mathcal{F}$, d'où $V^{K^\dagger_\mathcal{F}} \subset V^{K^\dagger_{\mathcal{F}'}}$. Alors l'homomorphisme $C_i \to C_{i-1}$ est la somme sur $\mathcal{F}$ de dimension i et $\mathcal{F}'$ dans l'adhérence de $\mathcal{F}$ des inclusions $V^{K^\dagger_\mathcal{F}} \subset V^{K^\dagger_{\mathcal{F}'}}$ multipliées par le signe $\epsilon_{\mathcal{F},\mathcal{F}'}$. Chaque C_i est muni d'une action de $G(F)$. Un élément $g \in G(F)$ envoie un élément $v \in V^{K^\dagger_\mathcal{F}}$ sur $\pi(g)v \in V^{K^\dagger_{g\mathcal{F}}}$ multiplié, si $i > 0$, par $+1$ si l'action de g envoyant $\mathcal{F}$ sur $g\mathcal{F}$ conserve l'orientation, par -1 sinon. La suite (1) est une suite exacte de représentations de $G(F)$.

Fixons $\mathcal{F}_\star \in Fac(G;A)$. On pose simplement $K_\star^\dagger = K_{\mathcal{F}_\star}^\dagger$, $K_\star^0 = K_{\mathcal{F}_\star}^0$, $K_\star^+ = K_{\mathcal{F}_\star}^+$. Pour tout entier $R > 0$, on fixe un sous-ensemble $B_R \subset Imm(G_{AD})$ de sorte que les conditions suivantes soient vérifiées :

(2) B_R est compact et est réunion (finie) de facettes ;

(3) B_R est invariant par $K_\star^\dagger$;

(4) l'intersection $B_R(A) = B_R \cap App(A)$ est convexe ;

(5) pour $R < R'$, on a $B_R \subset B_{R'}$ et $Imm(G_{AD})$ est réunion des B_R pour $R \in \mathbb{N}_{>0}$.

On peut construire de tels ensembles de la façon suivante. Décrivons $\mathcal{F}_\star$ par les relations (1) et (2) du paragraphe 4. Rappelons que tous les ensembles Γ_α sont invariants par translations par $\mathbb{Z}$. On définit $B_R(A)$ comme l'ensemble des $x \in App(A)$ vérifiant les relations

$c_{\alpha,\mathcal{F}_\star} - R \leq \alpha(x) \leq c_{\alpha,\mathcal{F}_\star} + R$ pour tout $\alpha \in \Sigma_{\mathcal{F}_\star}$;

$c_{\alpha,\mathcal{F}_\star} - R \leq \alpha(x) \leq c_{\alpha,\mathcal{F}_\star}^+ + R$ pour tout $\alpha \in \Sigma - \Sigma_{\mathcal{F}_\star}$.

Ces ensembles sont invariants par $K_\star^\dagger \cap Norm_{G(F)}(A)$. On définit B_R comme l'ensemble des $x \in Imm(G_{AD})$ tels qu'il existe $k \in K_\star^\dagger$ de sorte que $kx \in B_R(A)$. On a bien $B_R(A) = B_R \cap App(A)$ en vertu de la propriété suivante :

(6) soient deux facettes $\mathcal{F}, \mathcal{F}' \subset App(A)$; supposons qu'il existe $x \in K_\star^\dagger$ telles que $x(\mathcal{F}) = \mathcal{F}'$; alors il existe $n \in K_\star^\dagger \cap Norm_{G(F)}(A)$ tel que $n(\mathcal{F}) = \mathcal{F}'$.

Preuve. On écrit $x = n_x x'$ avec $n_x \in K_\star^\dagger \cap Norm_{G(F)}(A)$ et $x' \in K_\star^0$. En posant $\mathcal{F}'' = n_x^{-1}(\mathcal{F}')$, on a $x'(\mathcal{F}) = \mathcal{F}''$ et il suffit de montrer qu'il existe $n'' \in K_\star^0 \cap Norm_{G(F)}(A)$ tel que $n''(\mathcal{F}) = \mathcal{F}''$. En oubliant cette construction, on suppose $x \in K_\star^0$. On sait que s'il existe $g \in G(F)$ tel que $g(\mathcal{F}) = \mathcal{F}'$, alors il existe $n_1 \in Norm_{G(F)}(A)$ tel que $n_1(\mathcal{F}) = \mathcal{F}'$ (cf. [5] 7.4.1). Fixons donc un tel n_1. On a alors $n_1^{-1}x \in K_{\mathcal{F}}^\dagger$ et on peut écrire $n_1^{-1}x = n_2 y$, avec $n_2 \in Norm_{G(F)}(A) \cap K_{\mathcal{F}}^\dagger$ et $y \in K_{\mathcal{F}}^0$. On sait que, pour $n', n'' \in Norm_{G(F)}(A)$, l'égalité $K_\star^0 n' K_{\mathcal{F}}^0 = K_\star^0 n'' K_{\mathcal{F}}^0$ entraîne que n' appartient à $(K_\star^0 \cap Norm_{G(F)}(A))n''(K_{\mathcal{F}}^0 \cap Norm_{G(F)}(A))$, cf. [9] remarque 9. L'égalité $x = n_1 n_2 y$ entraîne donc qu'il existe $n \in K_\star^0 \cap Norm_{G(F)}(A)$ et $n_3 \in K_{\mathcal{F}}^0 \cap Norm_{G(F)}(A)$ tels que $n_1 n_2 = n n_3$. Alors $x = n n_3 y \in n K_{\mathcal{F}}^0$ et $\mathcal{F}' = x(\mathcal{F}) = n(\mathcal{F})$. Cela démontre (6). $\square$

On voit alors que les ensembles B_R vérifient les conditions requises.

Pour $i = 0, ..., n$, on note $C_{i,R}$ le sous-espace de C_i qui est la somme directe des $V^{K_{\mathcal{F}}^+}$ pour $\mathcal{F}$ de dimension i et $\mathcal{F} \subset B_R$. On note $V_R = \delta_0(C_{0,R})$. D'après Mayer et Solleveld, la suite

$$0 \to C_{n,R} \to ... \to C_{0,R} \to V_R$$

est une suite exacte de représentations de $K_\star^\dagger$, cf. [12] théorème 2.4. La condition (5) entraîne que V est réunion des V_R pour $R \in \mathbb{N}_{>0}$.

Puisqu'on a fixé une mesure de Haar sur $G(F)$, l'espace $C_c^\infty(G(F))$ est une algèbre de convolution. Cette algèbre agit dans V par $\pi(f)v = \int_{G(F)} \pi(g)v\, f(g)\, dg$ pour $f \in C_c^\infty(G(F))$ et $v \in V$. Fixons un sous-groupe ouvert H de $K_\star^0$ qui est distingué dans $K_\star^\dagger$. On note $C_c(K_\star^\dagger/H)$ la sous-algèbre des éléments de $C_c^\infty(G(F))$ qui sont biinvariantes par H et à support dans $K_\star^\dagger$. L'action de cette algèbre conserve chaque sous-espace V_R. L'espace d'invariants V^H étant de dimension finie, il est inclus dans V_R si R est assez grand. Dans ce cas, pour $f \in C_c(K_\star^\dagger/H)$, la trace de l'opérateur $\pi(f)$ dans V est égale à celle de sa restriction à V_R. On obtient que, pour R assez grand,

$$(7)\qquad trace\,\pi(f)=\sum_{i=0,\dots,n}(-1)^i trace\,\pi_{i,R}(f),$$

où $\pi_{i,R}$ est la représentation de $K_\star^\dagger$ (ou de $C_c(K_\star^\dagger/H)$) dans $C_{i,R}$. Il est facile de calculer chacune de ces traces. Soit $\mathcal{F}\in Fac(G)$. La restriction de π au groupe $K_{\mathcal{F}}^\dagger$ conserve l'espace $V^{K_{\mathcal{F}}^+}$. Comme on l'a dit au paragraphe 10, il s'en déduit une représentation de dimension finie $\pi_{\mathcal{F}}$ du groupe $K_{\mathcal{F}}^\dagger/K_{\mathcal{F}}^+=\sqcup_{\nu\in\mathcal{N}(\mathcal{F})}\mathbf{G}_{\mathcal{F}}^\nu(\mathbb{F}_q)$, dont on note $trace\,\pi_{\mathcal{F}}$ la trace habituelle. On la considère comme une fonction sur $K_{\mathcal{F}}^\dagger$ invariante par $K_{\mathcal{F}}^+$. A cause des orientations intervenant dans la définition des actions de $G(F)$ sur les C_i, on doit introduire le caractère $\epsilon_{\mathcal{F}}$ de $K_{\mathcal{F}}^\dagger$ défini ainsi : si $dim(\mathcal{F})=0$, ce caractère est trivial ; si $dim(\mathcal{F})>0$, pour $x\in K_{\mathcal{F}}^\dagger$, $\epsilon_{\mathcal{F}}(x)$ vaut 1 si l'action de x sur $\mathcal{F}$ conserve l'orientation, -1 sinon. Alors

$$(8)\qquad trace\,\pi_{i,R}(f)=\sum_{\mathcal{F}\subset B_R,dim(\mathcal{F})=i}\int_{K_{\mathcal{F}}^\dagger}\epsilon_{\mathcal{F}}(x)f(x)trace\,\pi_{\mathcal{F}}(x)\,dx.$$

Pour simplifier cette formule, montrons que

(9) soient $\mathcal{F}\in Fac(G)$ et $\nu\in\mathcal{N}(\mathcal{F})$; alors $(-1)^{dim(\mathcal{F})}\epsilon_{\mathcal{F}}(k)=(-1)^{dim(\mathcal{F}^\nu)}$ pour tout $k\in K_{\mathcal{F}}^\nu$.

Preuve. Si $dim(\mathcal{F})=0$, tous ces signes valent 1. Supposons $dim(\mathcal{F})>0$. On ne perd rien à supposer que $\mathcal{F}\subset App(A)$. Comme $K_{\mathcal{F}}^0$ fixe tout point de $\mathcal{F}$, le caractère $\epsilon_{\mathcal{F}}$ est trivial sur ce sous-groupe. On peut donc se limiter à prouver la formule de l'assertion pour $k\in K_{\mathcal{F}}^\nu\cap Norm_{G(F)}(A)$. Notons $x_{\mathcal{F}}$ le barycentre de $\mathcal{F}$. L'action de k conserve ce point et il existe un élément $w\in W$ tel que $ky-x_{\mathcal{F}}=w(y-x_{\mathcal{F}})$ pour tout $y\in App(A)$. Le sous-espace $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}/\mathcal{A}_G$ de $\mathcal{A}/\mathcal{A}_G$ est engendré par les $y-x_{\mathcal{F}}$ pour $y\in\mathcal{F}$. Il est conservé par w. Par définition, $\epsilon_{\mathcal{F}}(k)$ est le déterminant de l'action de w dans $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}/\mathcal{A}_G$ tandis que $dim(\mathcal{F}^\nu)$ est la dimension de l'espace des points fixes de cette action. Or w est une isométrie. Il est élémentaire de prouver que, pour une isométrie w d'un espace euclidien E, son déterminant est égal à $(-1)^{dim(E)-dim(E^w)}$, E^w étant l'espace des points fixes de w. Cela prouve (8). $\square$.

En décomposant chaque $K_{\mathcal{F}}^\dagger$ en réunion des $K_{\mathcal{F}}^\nu$ pour $\nu\in\mathcal{N}(\mathcal{F})$, on déduit de (7), (8) et (9) l'égalité

$$(10)\qquad trace\,\pi(f)=\sum_{(\mathcal{F},\nu)\in Fac^*(G);\mathcal{F}\subset B_R}(-1)^{dim(\mathcal{F}^\nu)}\int_{K_{\mathcal{F}}^\nu}f(k)trace\,\pi_{\mathcal{F}}(k)\,dk.$$

La somme en $\mathcal{F}$ est finie puisque $\mathcal{F}\subset B_R$. La somme en ν ne l'est pas forcément, mais on peut imposer de plus à ν d'appartenir à l'image par w_G du support de f. Alors la somme devient finie. Rappelons que cela vaut pour toute $f\in C_c(K_\star^\dagger/H)$ et tout R assez grand.

14 Une variante de la formule de Meyer-Solleveld

Considérons l'ensemble $Trip(G)$ des triplets $(\mathcal{F},\mathcal{F}',\nu)$ tels que :

- $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sont deux facettes de l'immeuble et $\mathcal{F}$ appartient à l'adhérence $\overline{\mathcal{F}'}$ de $\mathcal{F}'$;

- ν appartient à $\mathcal{N}(\mathcal{F})\cap\mathcal{N}(\mathcal{F}')$.

Deux tels triplets $(\mathcal{F},\mathcal{F}',\nu)$ et $(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}'_1,\nu_1)$ sont dits conjugués si $\nu_1=\nu$ et s'il existe $g\in G(F)$ tel que $g\mathcal{F}=\mathcal{F}_1$ et $g\mathcal{F}'=\mathcal{F}'_1$. Pour tout $(\mathcal{F},\mathcal{F}',\nu)\in Trip(G)$, on va définir un nombre réel $z(\mathcal{F},\mathcal{F}',\nu)$. On ne perd rien à supposer que $\mathcal{F}'$ (donc aussi $\mathcal{F}$) est contenue dans $App(A)$. Introduisons le sous-tore $\mathbf{A}$ de $\mathbf{G}_{\mathcal{F}}$ comme en 4(8) et (9). La facette $\mathcal{F}'$ détermine un sous-espace parabolique $\mathbf{P}^{\nu}_{\mathcal{F}'}$ de $\mathbf{G}^{\nu}_{\mathcal{F}}$ et un sous-tore $\mathbf{A}^{\nu}_{\mathcal{F}'}$ de $\mathbf{A}$, dont le commutant $\mathbf{M}^{\nu}_{\mathcal{F}'}$ dans $\mathbf{G}^{\nu}_{\mathcal{F}}$ est une composante de Levi de $\mathbf{P}^{\nu}_{\mathcal{F}'}$. On sait que $\mathbf{P}^{\nu}_{\mathcal{F}'}$ détermine une chambre ouverte $C^{\mathcal{F},\nu}_{\mathcal{F}'}$ dans l'espace $X_*(\mathbf{A}^{\nu}_{\mathcal{F}'})\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$. Celui-ci s'identifie à $\mathcal{A}^{\nu}_{\mathcal{F}'}$. Or on a muni $\mathcal{A}$, donc aussi $\mathcal{A}^{\nu}_{\mathcal{F}'}$, d'une structure d'espace euclidien. Notons B la boule de centre 0 et de rayon 1 dans cet espace. On définit $z(\mathcal{F},\mathcal{F}',\nu)$ comme le quotient de la mesure de $B\cap C^{\mathcal{F},\nu}_{\mathcal{F}'}$ par la mesure de B. Il est clair que

(1) pour deux éléments conjugués $(\mathcal{F},\mathcal{F}',\nu)$ et $\mathcal{F}_1,\mathcal{F}'_1,\nu)$, on a $z(\mathcal{F},\mathcal{F}',\nu)=z(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}'_1,\nu')$.

Montrons que

(2) soit $(\mathcal{F},\nu)\in Fac^*(G)$ et soit $\mathbf{M}^{\nu}$ un espace de Levi de $\mathbf{G}^{\nu}_{\mathcal{F}}$; d'après 5(6), à tout $\mathbf{P}^{\nu}\in\mathcal{P}(\mathbf{M}^{\nu})$ est associée une facette, notons-la $\mathcal{F}_{\mathbf{P}^{\nu}}$, et on a $(\mathcal{F},\mathcal{F}_{\mathbf{P}^{\nu}},\nu)\in Trip(G)$; alors

$$\sum_{\mathbf{P}^{\nu}\in\mathcal{P}(\mathbf{M}^{\nu})} z(\mathcal{F},\mathcal{F}_{\mathbf{P}^{\nu}},\nu)=1.$$

Pour le prouver, on peut encore supposer que $\mathcal{F}\subset App(A)$ et que $\mathbf{M}$ contient $\mathbf{A}$. On note $\mathbf{A}^{\nu}_{\mathbf{M}}$ le plus grand tore déployé de $\mathbf{G}_{\mathcal{F}}$ commutant à $\mathbf{M}^{\nu}$ et on pose $\mathcal{A}^{\nu}_{\mathbf{M}}=X_*(\mathbf{A}^{\nu}_{\mathbf{M}})\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$. Les chambres dans $\mathcal{A}^{\nu}_{\mathbf{M}}$ associées aux différents $\mathbf{P}^{\nu}\in\mathcal{P}(\mathbf{M}^{\nu})$ sont disjointes et leur réunion est dense dans $\mathcal{A}^{\nu}_{\mathbf{M}}$. Donc la somme des mesures des intersections de ces chambres avec la boule de centre 0 et de rayon 1 dans $\mathcal{A}^{\nu}_{\mathbf{M}}$ est la mesure de cette boule. Cela prouve (2). $\square$

Pour $(\mathcal{F},\nu)\in Fac^*(G)$ et pour un entier $R>0$, notons $E_R(\mathcal{F},\nu)$ l'ensemble des $\mathcal{F}_1\in Fac(G)$ telles que $\mathcal{F}_1\subset B_R$ et $(\mathcal{F}_1,\mathcal{F},\nu)\in Trip(G)$. Posons

$$z_R(\mathcal{F},\nu)=\sum_{\mathcal{F}_1\in E_R(\mathcal{F},\nu)}(-1)^{dim(\mathcal{F}_1^{\nu})}z(\mathcal{F}_1,\mathcal{F},\nu).$$

Pour $(\mathcal{F},\nu)\in Fac^*(G)$, on a défini les fonctions $\phi_{\mathcal{F},\nu}$ et $\phi_{\mathcal{F},\nu,cusp}$ sur $\mathbf{G}^{\nu}_{\mathcal{F}}(\mathbb{F}_q)$, que l'on peut considérer comme des fonctions sur $G(F)$. Montrons que, pour $f\in C_c(K^{\dagger}_{\star}/H)$ et pour R assez grand, on a l'égalité

$$(3)\qquad trace\,\pi(f)=\sum_{(\mathcal{F},\nu)\in Fac^*(G)} z_R(\mathcal{F},\nu)\int_{K^{\nu}_{\mathcal{F}}} f(k)\phi_{\mathcal{F},\nu,cusp}(k)\,dk.$$

Preuve. Fixons $(\mathcal{F},\nu)\in Fac^*(G)$ telle que $\mathcal{F}\subset B_R$. On définit une fonction $f_{\mathcal{F},\nu}$ sur $K^{\nu}_{\mathcal{F}}$ par $f_{\mathcal{F},\nu}(g)=\int_{K_{\mathcal{F}+}} f(gk)\,dk$. On peut la descendre en une fonction sur $\mathbf{G}^{\nu}_{\mathcal{F}}(\mathbb{F}_q)$. Alors

$$\int_{K^{\nu}_{\mathcal{F}}} f(k)trace\,\pi_{\mathcal{F}}(k)\,dk\;=\sum_{\mathbf{G}^{\nu}_{\mathcal{F}}(\mathbb{F}_q)} f_{\mathcal{F},\nu}(x)\phi_{\mathcal{F},\nu}(x).$$

On calcule $\phi_{\mathcal{F},\nu}$ en appliquant la formule 2(5). On a expliqué en 5 que les sous-espaces paraboliques de $\mathbf{G}^{\nu}_{\mathcal{F}}$ correspondaient bijectivement aux facettes $\mathcal{F}'$ dont l'adhérence contient $\mathcal{F}$ et telles que $\nu\in\mathcal{N}(\mathcal{F}')$. Autrement dit aux facettes $\mathcal{F}'$ telles que $(\mathcal{F},\mathcal{F}',\nu)\in Trip(G)$. D'après (2), pour une telle facette $\mathcal{F}'$ correspondant à un sous-espace $\mathbf{P}^{\nu}_{\mathcal{F}'}$, on peut choisir $z(\mathbf{P}^{\nu}_{\mathcal{F}'})=z(\mathcal{F},\mathcal{F}',\nu)$. Un espace de Levi $\mathbf{M}^{\nu}_{\mathcal{F}'}$ s'identifie à $\mathbf{G}^{\nu}_{\mathcal{F}'}$ et $res^{\mathbf{G}^{\nu}_{\mathcal{F}}}_{\mathbf{M}^{\nu}_{\mathcal{F}'}}(\phi_{\mathcal{F},\nu})$ s'identifie à $\phi_{\mathcal{F}',\nu}$ d'après 10(1). Il en résulte que $proj_{cusp,\mathbf{M}^{\nu}_{\mathcal{F}'}}(\phi_{\mathcal{F},\nu})$ s'identifie à $\phi_{\mathcal{F}',\nu,cusp}$. A ce point, la formule 2(5) donne

$$\sum_{\mathbf{G}^{\nu}_{\mathcal{F}}(\mathbb{F}_q)} f_{\mathcal{F},\nu}(x)\phi_{\mathcal{F},\nu}(x) = \sum_{x\in\mathbf{G}^{\nu}_{\mathcal{F}}(\mathbb{F}_q)} \sum_{\mathcal{F}'\in Fac(G);(\mathcal{F},\mathcal{F}',\nu)\in Trip(G)} z(\mathcal{F},\mathcal{F}',\nu)f_{\mathcal{F},\nu}(x)\phi_{\mathcal{F}',\nu,cusp}[\mathbf{P}^{\nu}_{\mathcal{F}'}](x).$$

Fixons $\mathcal{F}'$ intervenant dans le membre de droite. On voit que

$$\sum_{x\in\mathbf{G}^{\nu}_{\mathcal{F}}(\mathbb{F}_q)} f_{\mathcal{F},\nu}(x)\phi_{\mathcal{F}',\nu,cus}[\mathbf{P}^{\nu}_{\mathcal{F}'}](x) = \sum_{x\in\mathbf{P}^{\nu}_{\mathcal{F}}(\mathbb{F}_q)} f_{\mathcal{F},\nu}(x)\phi_{\mathcal{F}',\nu,cusp}[\mathbf{P}^{\nu}_{\mathcal{F}'}](x)$$

$$= \sum_{x\in\mathbf{G}^{\nu}_{\mathcal{F}'}(\mathbb{F}_q)} f_{\mathcal{F}',\nu}(x)\phi_{\mathcal{F}',\nu,cusp}(x) = \int_{K^{\nu}_{\mathcal{F}'}} f(k)\phi_{\mathcal{F}',\nu,cusp}(k)\,dk.$$

D'où

$$\int_{K^{\nu}_{\mathcal{F}}} f(k)trace\,\pi_{\mathcal{F}}(k)\,dk \;= \sum_{\mathcal{F}'\in Fac(G);(\mathcal{F},\mathcal{F}',\nu)\in Trip(G)} z(\mathcal{F},\mathcal{F}',\nu)\int_{K^{\nu}_{\mathcal{F}'}} f(k)\phi_{\mathcal{F}',\nu,cusp}(k)\,dk.$$

Reportons cette égalité dans la formule 13(10). On obtient

$$trace\,\pi(f) = \sum_{(\mathcal{F},\nu)\in Fac^*(G);\mathcal{F}\subset B_R} (-1)^{dim(\mathcal{F}^{\nu})}$$

$$\sum_{\mathcal{F}'\in Fac(G);(\mathcal{F},\mathcal{F}',\nu)\in Trip(G)} z(\mathcal{F},\mathcal{F}',\nu)\int_{K^{\nu}_{\mathcal{F}'}} f(k)\phi_{\mathcal{F}',\nu,cusp}(k)\,dk.$$

On change $\mathcal{F}$ en $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}'$ en $\mathcal{F}$ et on intervertit les sommations. Il suffit d'appliquer la définition de $z_R(\mathcal{F},\nu)$ pour obtenir la formule (3). $\square$

On a fixé une facette $\mathcal{F}_\star \subset App(A)$. Fixons une facette ouverte $\mathcal{F}_{\star\star} \subset App(A)$ dont l'adhérence contient $\mathcal{F}_\star$. On pose $K^0_{\star\star} = K^0_{\mathcal{F}_{\star\star}}$. Ce groupe est contenu dans $K^0_\star$. Pour toute $f \in C_c(K^\dagger_\star/H)$, notons $f_{\star\star}$ la fonction sur $G(F)$ définie par $f_{\star\star}(g) = \int_{K^0_{\star\star}} f(k^{-1}gk)\,dk$. Elle appartient encore à $C_c(K^\dagger_\star/H)$. Montrons que la formule (3) entraîne

(4) $$trace\,\pi(f) = \sum_{(\mathcal{F},\nu)\in Fac^*(G;A)} mes(K^0_{\star\star}\cap K^0_{\mathcal{F}})^{-1}z_R(\mathcal{F},\nu)\int_{K^{\nu}_{\mathcal{F}}} f_{\star\star}(k)\phi_{\mathcal{F},\nu,cusp}(k)\,dk.$$

Preuve. A tout élément $(\mathcal{F},\nu)\in Fac^*(G;A)$, associons l'ensemble $X_{\mathcal{F},\nu}$ des éléments $(k(\mathcal{F}),\nu)$ quand k décrit $K^0_{\star\star}$. On a

(5) quand $(\mathcal{F},\nu)$ décrit $Fac^*(G;A)$, la réunion des $X_{\mathcal{F},\nu}$ est $Fac^*(G)$ tout entier.

En effet, soit $(\mathcal{F}_1,\nu)\in Fac^*(G)$. On sait que l'on peut fixer $g\in G(F)$ tel que $\mathcal{F}' = g(\mathcal{F}_1)$ soit contenue dans l'adhérence de $\mathcal{F}_{\star\star}$. Le groupe $K^0_{\star\star}$ est un sous-groupe d'Iwahori associé à une facette de $App(A)$. On a donc la décomposition $G(F) = K^0_{\star\star}Norm_{G(F)}(A)K^0_{\star\star}$. Ecrivons $g^{-1} = k_1nk_2$ conformément à cette décomposition. On a $K^0_{\star\star}\subset K^0_{\mathcal{F}'}$ donc k_2 fixe $\mathcal{F}'$. Alors $\mathcal{F}_1 = k_1n(\mathcal{F}')$. Le couple $(n(\mathcal{F}'),\nu)$ appartient à $Fac^*(G;A)$ et on a $(\mathcal{F}_1,\nu) = k_1(n(\mathcal{F}'),\nu)$. Cela démontre (5).

Pour deux éléments $(\mathcal{F},\nu)$ et $(\mathcal{F}',\nu')$ de $Fac^*(G;A)$ les ensembles $X(\mathcal{F},\nu)$ et $X(\mathcal{F}',\nu')$ sont disjoints ou égaux. Ils sont égaux si et seulement si $\nu=\nu'$ et il existe $k\in K^0_{\star\star}$ tel que $\mathcal{F}' = k(\mathcal{F})$. Les facettes $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ étant toutes deux dans $App(A)$, on sait que cette dernière condition ne peut être vérifiée que si $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$ (cela se voit comme en 13(6)). Autrement dit, les ensembles $X(\mathcal{F},\nu)$ et $X(\mathcal{F}',\nu')$ sont toujours disjoints si $(\mathcal{F},\nu) \neq (\mathcal{F}',\nu')$. On peut alors récrire la somme (3) comme une somme sur les $(\mathcal{F},\nu) \in Fac^*(G;A)$ suivie d'une somme sur les éléments de $X(\mathcal{F},\nu)$. Cette dernière est aussi une somme sur les $(k(\mathcal{F}),\nu)$ pour $k \in K^0_{\star\star}/K^0_{\star\star} \cap K^0_{\mathcal{F}}$. Le terme que l'on somme est

$$z_R(k(\mathcal{F}),\nu) \int_{K^\nu_{k(\mathcal{F})}} f(x)\phi_{k(\mathcal{F}),\nu,cusp}(x)\, dx,$$

L'intégrale se récrit

$$\int_{K^\nu_{\mathcal{F}}} f(kxk^{-1})\phi_{k(\mathcal{F}),\nu,cusp}(kxk^{-1})\, dx.$$

Il résulte de 10(4) que $\phi_{k(\mathcal{F}),\nu,cusp}(kxk^{-1}) = \phi_{\mathcal{F},\nu,cusp}(x)$. D'autre part, parce que B_R est invariant par $K^\dagger_\star$, on voit que $z_R(k(\mathcal{F}),\nu) = z_R(\mathcal{F},\nu)$. La contribution de $X(\mathcal{F},\nu)$ est donc

$$z_R(\mathcal{F},\nu) \int_{K^\nu_{\mathcal{F}}} \phi_{\mathcal{F},\nu,cusp}(x) \sum_{k\in K^0_{\star\star}/K^0_{\star\star}\cap K^0_{\mathcal{F}}} f(kxk^{-1})\, dx.$$

On voit que la somme intérieure est égale à

$$mes(K^0_{\star\star} \cap K^0_{\mathcal{F}})^{-1} f_{\star\star}(x).$$

En rassemblant ces calculs, la formule (3) devient (4). $\square$

15 Descente aux sous-groupes de Levi

Considérons un entier $N > 0$. Soit $P \in \mathcal{F}(M_{min})$. On note $X'_N(P)$ l'ensemble des $x \in App(A)$ tels que $\alpha(x) > N$ pour tout $\alpha \in \Sigma(U_P)$. Si $Q \in \mathcal{F}(M_{min})$ et $Q \subset P$, on a $U_P \subset U_Q$ donc $X'_N(Q) \subset X'_N(P)$. On pose

$$X_N(P) = X'_N(P) - \bigcup_{Q\in\mathcal{F}(M_{min}),Q\subsetneq P} X'_N(Q).$$

Les ensembles $X'_N(P)$ et $X_N(P)$ sont des réunions de facettes (parce que, pour tout $\alpha \in \Sigma$, l'ensemble Γ_α contient $\mathbb{Z}$). On a

(1) pour toute facette $\mathcal{F} \in Fac(G;A)$, l'ensemble des $P \in \mathcal{F}(M_{min})$ tels que $\mathcal{F} \subset X'_N(P)$ possède un unique élément minimal; celui-ci est l'unique $P \in \mathcal{F}(M_{min})$ tel que $\mathcal{F} \subset X_N(P)$.

Preuve. Fixons $x \in \mathcal{F}$. Notons $\Sigma_0(x)$, resp. $\Sigma_+(x)$, l'ensemble des éléments $\alpha \in \Sigma$ tels que $\alpha(x) = 0$, resp. $\alpha(x) > 0$. L'ensemble $\Sigma_0(x) \cup \Sigma_+(x)$ est clos, c'est-à-dire que pour deux éléments α,β de cet ensemble tels que $\alpha+\beta \in \Sigma$, $\alpha+\beta$ appartient encore à cet ensemble. La réunion de $\Sigma_0(x) \cup \Sigma_+(x)$ et de son opposé $\Sigma_0(x) \cup (-\Sigma_+(x))$ est Σ tout entier. Il en résulte qu'il existe $P_x \in \mathcal{F}(M_{min})$ tel que $\Sigma(P_x) = \Sigma_0(x) \cup \Sigma_+(x)$ et $\Sigma(U_{P_x}) = \Sigma_+(x)$. On note M_x la composante de Levi de P_x contenant M_{min}. Choisissons un sous-groupe parabolique minimal $P_{min} \in \mathcal{P}(M_{min})$ tel que $P_{min} \subset P_x$. Notons Δ la base de Σ associée à P_{min}, Δ^{M_x} le sous-ensemble des $\alpha \in \Delta$ qui interviennent dans M_x et notons Δ_N le sous-ensemble des $\alpha \in \Delta$ tels que $\alpha(x) > N$. Il correspond à cet ensemble un sous-groupe parabolique P contenant P_{min} : $\Delta - \Delta_N$ est l'ensemble des racines simples intervenant dans la composante de Levi M de P qui contient M_{min}. Pour $\alpha \in \Delta^{M_x}$, on a $\alpha(x) = 0$ donc $\alpha \notin \Delta_N$. Il en résulte que $M_x \subset M$ donc $P_x \subset P$. Pour $\alpha \in \Sigma(U_P)$, α est combinaison linéaire à coefficients entiers positifs d'éléments de Δ et au moins un élément de Δ_N intervient avec un coefficient ≥ 1. Donc $\alpha(x) > N$. Cela entraîne que $x \in X'_N(P)$. Il reste à prouver que, pour tout $Q \in \mathcal{F}(M_{min})$ tel que $x \in X'_N(Q)$, on a $P \subset Q$. Considérons donc un tel sous-groupe parabolique Q. Pour $\alpha \in \Sigma(U_Q)$, on a $\alpha(x) > N$ a fortiori $\alpha(x) > 0$. Donc $\Sigma(U_Q) \subset \Sigma_+(x)$, puis $U_Q \subset U_{P_x}$. Cela entraîne $P_x \subset Q$ d'où aussi $P_{min} \subset Q$. A la composante de Levi L de Q contenant M_{min} correspond un sous-ensemble Δ^L de Δ. Pour $\alpha \in \Delta - \Delta_L$, on a $\alpha \in \Sigma(U_Q)$ donc $\alpha(x) > N$, ce qui signifie que $\alpha \in \Delta_N$. Donc L contient M puis Q contient P. Cela achève la preuve. $\square$

Remarquons que

(2) l'ensemble $X_N(G)$ est compact ;

Preuve. C'est le complémentaire de la réunion des $X'_N(P)$ pour P propre. Or chacun de ces ensembles est ouvert. Donc $X_N(G)$ est fermé et il suffit de prouver qu'il est inclus dans un compact. D'après la preuve précédente, si x est un point de $X_N(G)$, il existe $P_{min} \in \mathcal{P}(M_{min})$ tel qu'en notant Δ la base de Σ associée à P_{min}, on ait $0 \leq \alpha(x) \leq N$ pour tout $\alpha \in \Delta$. Pour chaque P_{min}, l'ensemble des x vérifiant ces conditions est compact. Il n'y a qu'un nombre fini de P_{min}. $\square$

Soit $P \in \mathcal{F}(M_{min})$, notons M sa composante de Levi contenant M_{min}. L'application produit $U_{\bar{P}}(F) \times M(F) \times U_P(F) \to G(F)$ identifie l'ensemble de départ à un ouvert dense de $G(F)$. On a déjà fixé des mesures sur $G(F)$ et $M(F)$. On munit les groupes $U_{\bar{P}}(F)$ et $U_P(F)$ de mesures de Haar de sorte que, pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G(F))$, on ait l'égalité

$$\int_{G(F)} f(g)\,dg = \int_{U_{\bar{P}}(F)\times M(F)\times U_P(F)} f(\bar{u}mu)\delta_P(m)\,du\,dm\,d\bar{u}.$$

Lemme. *Il existe un entier $N > 0$ de sorte que, pour toute fonction $f \in C_c(K_\star^\dagger/H)$ et pour tout $(\mathcal{F},\nu) \in Fac^*(G;A)$ tel que $\mathcal{F} \subset X'_N(P)$, on ait les propriétés suivantes :*

(i) si M ne contient pas $M_{\mathcal{F},\nu}$,

$$\int_{K_{\mathcal{F}}^\nu} f_{\star\star}(k)\phi_{\mathcal{F},\nu,cusp}(k)\,dk = 0;$$

(ii) si M contient $M_{\mathcal{F},\nu}$,

$$\int_{K_{\mathcal{F}}^\nu} f_{\star\star}(k)\phi_{\mathcal{F},\nu,cusp}(k)\,dk = mes(K_{\mathcal{F}}^+ \cap U_{\bar{P}}(F)) \int_{K_{\mathcal{F}^M}^\nu} f_{\star\star,[P]}(k)\phi_{\mathcal{F}^M,\nu,cusp}(k)\,dk.$$

Rappelons que la fonction $\phi_{\mathcal{F}^M,\nu,cusp}$ a été définie en 10.

Preuve. On fixe un entier $c \geq 1$ de sorte que

(3) pour tout $\alpha \in \Sigma$, $|c_{\alpha,\mathcal{F}_\star}| < c$, $|c^+_{\alpha,\mathcal{F}_\star}| < c$ et $U_{\alpha,-c} \subset H$.

On impose à N de vérifier

(4) $N \geq 3c$.

D'autre part, puisque $K_\star^\dagger/Z(G)(F)$ est compact, on peut aussi imposer

(5) soit $m \in M(F)$ et, pour tout $\alpha \in \Sigma(U_P)$, soit $u_\alpha \in U_\alpha(F)$; supposons $m\prod_{\alpha\in\Sigma(U_P)} u_\alpha \in K_\star^\dagger$ (pour un ordre fixé quelconque sur $\Sigma(U_P)$) ; alors $u_\alpha \in U_{\alpha,N-1}$ pour tout $\alpha \in \Sigma(U_P)$.

Soit $(\mathcal{F},\nu)\in Fac^*(G;A)$ tel que $\mathcal{F}\subset X'_N(P)$. Supposons d'abord que M contient $M_{\mathcal{F},\nu}$. Grâce au lemme 6, on a l'égalité

$$\int_{K_{\mathcal{F}}^{\nu}} f_{\star\star}(k)\phi_{\mathcal{F},\nu,cusp}(k)\,dk=\int_{K_{\mathcal{F}}^{+}\cap U_{\bar{P}}(F)\times K_{\mathcal{F}M}^{\nu}\times K_{\mathcal{F}}^{+}\cap U_P(F)} f_{\star\star}(\bar{u}mu)\phi_{\mathcal{F},\nu,cusp}(\bar{u}mu)\,du\,dm\,d\bar{u}.$$

Dans l'expression ci-dessus, on a $\phi_{\mathcal{F},\nu,cusp}(\bar{u}mu)=\phi_{\mathcal{F}^M,\nu,cusp}(m)$ d'après 10(2) et parce que $\phi_{\mathcal{F},\nu,cusp}$ est invariante par $K_{\mathcal{F}}^{+}$. Pour $\alpha\in\Sigma(U_{\bar{P}})$, on a $c_{\alpha,\mathcal{F}}<-N$ d'après l'hypothèse $\mathcal{F}\subset X'_N(P)$. Les relations 4(7) et (3) et (4) ci-dessus entraînent $K_{\mathcal{F}}^{+}\cap U_\alpha(F)\subset H$. Dans l'expression ci-dessus, on a donc $\bar{u}\in H$, d'où $f_{\star\star}(\bar{u}mu)=f_{\star\star}(mu)$. La formule ci-dessus se récrit

$$(6)\qquad \int_{K_{\mathcal{F}}^{\nu}} f_{\star\star}(k)\phi_{\mathcal{F},\nu,cusp}(k)\,dk=mes(K_{\mathcal{F}}^{+}\cap U_{\bar{P}}(F))\int_{K_{\mathcal{F}M}^{\nu}}\psi(m)\phi_{\mathcal{F}^M,\nu,cusp}(m)\,dm,$$

où

$$\psi(m)=\int_{K_{\mathcal{F}}^{+}\cap U_P(F)} f_{\star\star}(mu)\,du.$$

Mais $K_{\mathcal{F}}^{+}\cap U_P(F)$ est produit des $K_{\mathcal{F}}^{+}\cap U_\alpha(F)$ pour $\alpha\in\Sigma(U_P)$. En utilisant 4(7), (5) ci-dessus et l'hypothèse $\mathcal{F}\subset X'_N(P)$, on voit que, pour tous $m\in M(F)$ et $u\in U_P(F)$, la condition $mu\in K_\star^\dagger$ impose $u\in K_{\mathcal{F}}^{+}\cap U_P(F)$. Puisque $f_{\star\star}$ est à support dans $K_\star^\dagger$, on a $f_{\star\star}(mu)=0$ si $u\notin K_{\mathcal{F}}^{+}\cap U_P(F)$. On peut donc remplacer dans la définition de ψ l'intégration sur $K_{\mathcal{F}}^{+}\cap U_P(F)$ par l'intégration sur $U_P(F)$ tout entier. Alors $\psi(m)=\delta_P(m)^{-1/2}f_{\star\star,[P]}(m)$. Mais on intègre sur $m\in K_{\mathcal{F}M}^{\nu}$. L'image d'un tel m dans $M_{ad}(F)$ appartient à un sous-groupe compact donc $\delta_P(m)=1$. On peut donc remplacer la fonction ψ par $f_{\star\star,[P]}$ et la formule (6) devient celle du (ii) de l'énoncé.

Supposons maintenant que M ne contient pas $M_{\mathcal{F},\nu}$. Remarquons que, puisque $f_{\star\star}$ est à support dans $K_\star^\dagger$, l'intégrale à calculer est nulle si $K_\star^\dagger$ ne coupe pas $K_{\mathcal{F}}^{\nu}$. On peut donc supposer que $K_\star^\dagger$ coupe $K_{\mathcal{F}}^{\nu}$. Cela implique que $\nu\in\mathcal{N}(\mathcal{F}_\star)$ et que $K_\star^\dagger\cap K_{\mathcal{F}}^{\nu}=K_\star^{\nu}\cap K_{\mathcal{F}}^{\nu}$. Notre intégrale vit en fait sur cet ensemble. Fixons un point $x_\star\in\mathcal{F}_\star^{\nu}$. Toute racine $\alpha\in\Sigma-\Sigma^{M_{\mathcal{F},\nu}}$ est non constante sur $\mathcal{F}^\nu$. On peut donc fixer un point $x\in\mathcal{F}^\nu$ tel que, en posant $v=x-x_\star$, on ait $\alpha(v)\neq 0$ pour tout $\alpha\in\Sigma-\Sigma^{M_{\mathcal{F},\nu}}$. Considérons l'ensemble des sous-groupes paraboliques $P'\in\mathcal{F}(M_{min})$ tels que $\alpha(v)>N-c$ pour tout $\alpha\in\Sigma(U_{P'})$. La condition (3) et l'hypothèse $\mathcal{F}\in X'_N(P)$ entraînent que P appartient à cet ensemble. La même preuve qu'en (1) montre que cet ensemble possède un unique élément minimal. On note Q cet élément et L sa composante de Levi contenant M_{min}. On a donc $Q\subset P$ et $L\subset M$. A fortiori, L ne contient pas $M_{\mathcal{F},\nu}$. On pose $Q'=M_{\mathcal{F},\nu}\cap Q$, $L'=M_{\mathcal{F},\nu}\cap L$. Alors Q' est un sous-groupe parabolique propre de $M_{\mathcal{F},\nu}$ et L' est sa composante de Levi contenant M_{min}. Il existe une unique facette $\mathcal{F}'$ telle que $\mathcal{F}'$ coupe le segment $[x_\star,x]$ selon un ouvert de ce segment et que x appartienne à l'adhérence de cette intersection (il se peut que $\mathcal{F}'=\mathcal{F}$). De même, il existe une unique facette $\mathcal{F}'_\star$ telle que $\mathcal{F}'_\star$ coupe le segment $[x_\star,x]$ selon un ouvert de ce segment et que $x_\star$ appartienne à l'adhérence de cette intersection. Montrons que

(7) $\nu\in\mathcal{N}(\mathcal{F}'_\star)$ et $\nu\in\mathcal{N}(\mathcal{F}')$; $K_\star^{\nu}\cap K_{\mathcal{F}}^{\nu}\subset K_{\mathcal{F}'_\star}^{\nu}\subset K_\star^{\nu}$ et $K_\star^{\nu}\cap K_{\mathcal{F}}^{\nu}\subset K_{\mathcal{F}'}^{\nu}\subset K_{\mathcal{F}}^{\nu}$; $M_{\mathcal{F}'_\star,\nu}\subset L'$ et $M_{\mathcal{F}',\nu}\subset L'$.

On considère le cas de $\mathcal{F}'$, celui de $\mathcal{F}'_\star$ étant analogue. Soit $g\in K_\star^{\nu}\cap K_{\mathcal{F}}^{\nu}$. Alors l'action de g fixe $x_\star$ et x. Elle fixe donc tout point du segment. En particulier, elle fixe un point de $\mathcal{F}'$ et g appartient à $K_{\mathcal{F}'}^{\dagger}$. Puisque $w_G(g)=\nu$, on a $\nu\in\mathcal{N}(\mathcal{F}')$ et $g\in K_{\mathcal{F}'}^{\nu}$. L'inclusion $K_{\mathcal{F}'}^{\nu}\subset K_{\mathcal{F}}^{\nu}$ est évidente si $\mathcal{F}'=\mathcal{F}$. Sinon elle résulte de 5(6) car $\mathcal{F}$ est incluse dans l'adhérence de $\mathcal{F}'$. L'intersection de $\mathcal{F}'$ et du segment $[x_\star, x]$ est contenue dans l'ensemble des points fixes d'un élément g comme ci-dessus, donc incluse dans $\mathcal{F}'^\nu$. Puisque cette intersection est ouverte dans le segment, une racine qui est constante sur $\mathcal{F}'^\nu$ annule v. D'après le choix du point x, cela entraîne $\alpha \in \Sigma^{M_{\mathcal{F},\nu}}$. Cela entraîne aussi $\alpha \in \Sigma^L$ puisque, pour une racine $\beta \notin \Sigma^L$, on a $|\beta(v)| > N - c$. Donc $\alpha \in \Sigma^{L'}$, d'où l'inclusion $M_{\mathcal{F}',\nu} \subset L'$. Cela démontre (7).

Une conséquence de ces propriétés est que

$$K_\star^\nu \cap K_{\mathcal{F}}^\nu = K_{\mathcal{F}'_\star}^\nu \cap K_{\mathcal{F}'}^\nu.$$

Les groupes qui conservent ces espaces sont donc aussi égaux, c'est-à-dire

$$K_\star^0 \cap K_{\mathcal{F}}^0 = K_{\mathcal{F}'_\star}^0 \cap K_{\mathcal{F}'}^0.$$

On choisit un sous-groupe parabolique P' de G contenant M_{min} et tel que $P' \cap M_{\mathcal{F},\nu} = Q'$. L'ensemble $\Sigma(U_{P'})$ se décompose en $\Sigma_1^+ \cup \Sigma_2^+$, où $\Sigma_1^+ = \Sigma(U_{Q'})$ et Σ_2^+ est son complémentaire. On ordonne $\Sigma(U_{P'})$ de sorte que les éléments de Σ_1^+ soient inférieurs à ceux de Σ_2^+. On ordonne $\Sigma(U_{\bar{P}'}) = -\Sigma(U_{P'})$ de sorte que les éléments de $-\Sigma_2^+$ soient inférieurs à ceux de $-\Sigma_1^+$. On applique le lemme 6 à $(\mathcal{F}', \nu)$ et au couple (P', L'). C'est loisible puisque $M_{\mathcal{F}',\nu} \subset L'$. On a donc

$$K_{\mathcal{F}'}^\nu = \left(\prod_{\alpha \in \Sigma(U_{\bar{P}'})} K_{\mathcal{F}'}^0 \cap U_\alpha(F) \right) (K_{\mathcal{F}'}^\nu \cap L'(F)) \left(\prod_{\alpha \in \Sigma(U_{P'})} K_{\mathcal{F}'}^0 \cap U_{-\alpha}(F) \right).$$

Une décomposition analogue vaut pour $K_{\mathcal{F}'_\star}^\nu$. Puisque les produits ci-dessus sont directs, on obtient une décomposition

$$K_\star^\nu \cap K_{\mathcal{F}}^\nu = K_{\mathcal{F}'_\star}^\nu \cap K_{\mathcal{F}'}^\nu = \left(\prod_{\alpha \in \Sigma(U_{\bar{P}'})} K_\alpha \right) K_{L'}^\nu \left(\prod_{\alpha \in \Sigma(U_{P'})} K_\alpha \right),$$

où $K_{L'}^\nu = K_{\mathcal{F}'}^\nu \cap K_{\mathcal{F}'_\star}^\nu \cap L'(F)$ et, pour tout $\alpha \in \Sigma(U_{P'})$,

$$K_{\pm\alpha} = K_{\mathcal{F}'_\star}^0 \cap K_{\mathcal{F}'}^0 \cap U_{\pm\alpha}(F) = K_\star^0 \cap K_{\mathcal{F}}^0 \cap U_{\pm\alpha}(F).$$

Cette décomposition se récrit

$$K_\star^\nu \cap K_{\mathcal{F}}^\nu = K_2^- K_1^- K_{L'}^\nu K_1^+ K_2^+,$$

où, pour $i = 1, 2$ et $\epsilon = \pm$, K_i^ϵ est le produit des $K_{\epsilon\alpha}$ pour $\alpha \in \Sigma_i^+$. On peut remplacer notre intégration par une intégration sur le membre de droite ci-dessus (en choisissant convenablement une décomposition de la mesure). D'où

$$\int_{K_{\mathcal{F}}^\nu} f_{\star\star}(k) \phi_{\mathcal{F},\nu,cusp}(k)\, dk = \int_{K_2^- \ldots K_2^+} f_{\star\star}(k_2^- k_1^- k_{L'} k_1^+ k_2^+) \phi_{\mathcal{F},\nu,cusp}(k_2^- k_1^- k_{L'} k_1^+ k_2^+)\, dk_2^- \ldots dk_2^+.$$

Pour $\alpha \in \Sigma_2^+$, α n'intervient pas dans $M_{\mathcal{F},\nu}$ et il résulte du lemme 6 que $K_{\mathcal{F}}^0 \cap U_{\pm\alpha}(F) = K_{\mathcal{F}}^+ \cap U_{\pm\alpha}(F)$. Donc $K_{\pm\alpha} \subset K_{\mathcal{F}}^+$. La fonction $\phi_{\mathcal{F},\nu,cusp}$ est invariante par ce groupe, donc, dans la formule ci-dessus, on a

$$\phi_{\mathcal{F},\nu,cusp}(k_2^- k_1^- k_{L'} k_1^+ k_2^+) = \phi_{\mathcal{F},\nu,cusp}(k_1^- k_{L'} k_1^+).$$

Pour $\alpha \in \Sigma_1^+$, α intervient dans $U_{Q'}$ donc dans U_Q. Donc $\alpha(v) > N - c$. On a $\alpha(v) = \alpha(x) - \alpha(x_\star) < c^+_{\alpha,\mathcal{F}} - c_{\alpha,\mathcal{F}_\star}$. Grâce à (4), on en déduit que $c^-_{\alpha,\mathcal{F}} > c_{\alpha,\mathcal{F}_\star}$. Grâce à 4(6) et 4(7), cela entraîne que $K^0_\star \cap U_\alpha(F) \subset K^+_{\mathcal{F}}$, d'où aussi $K_\alpha \subset K^+_{\mathcal{F}}$. Pour la même raison que ci-dessus, on obtient

$$\phi_{\mathcal{F},\nu,cusp}(k_1^- k_{L'} k_1^+) = \phi_{\mathcal{F},\nu,cusp}(k_1^- k_{L'}).$$

Toujours pour $\alpha \in -\Sigma_1^+$, α intervient dans $U_{\bar{Q}}$ donc $\alpha(v) < -N + c$. Puisque $\alpha(v) = \alpha(x) - \alpha(x_\star) > c_{\alpha,\mathcal{F}} - c^+_{\alpha,\mathcal{F}_\star}$, on déduit de (4) que $c_{\alpha,\mathcal{F}} < -c$. Grâce à 4(6) et (3) ci-dessus, cela entraîne que $K^0_{\mathcal{F}} \cap U_\alpha(F) \subset H$. Donc $K_\alpha = K^0_{\mathcal{F}} \cap U_\alpha(F) \subset H$. Puisque H est distingué dans $K^\dagger_\star$ et que $f_{\star\star}$ est invariante par ce groupe, cela entraîne d'abord l'égalité

$$f_{\star\star}(k_2^- k_1^- k_{L'} k_1^+ k_2^+) = f_{\star\star}(k_2^- k_{L'} k_1^+ k_2^+).$$

Cela entraîne aussi aussi que $K_1^- = K^0_{\mathcal{F}} \cap U_{\bar{Q}'}(F)$. A ce point, on obtient la formule

$$(8) \qquad \int_{K^\nu_{\mathcal{F}}} f_{\star\star}(k)\phi_{\mathcal{F},\nu,cusp}(k)\, dk =$$

$$\int_{K_2^- K_{L'} K_1^+ K_2^+} f_{\star\star}(k_2^- k_{L'} k_1^+ k_2^+)\phi_{\mathcal{F},\nu,cusp,\bar{Q}'}(k_{L'})\, dk_2^- dk_{L'} dk_1^+ dk_2^+,$$

où

$$\phi_{\mathcal{F},\nu,cusp,\bar{Q}'}(k_{L'}) = \int_{K^0_{\mathcal{F}} \cap U_{\bar{Q}'}(F)} \phi_{\mathcal{F},\nu,cusp}(\bar{u} k_{L'})\, d\bar{u}.$$

L'image de $K^0_{\mathcal{F}} \cap \bar{Q}(F)$ dans $\mathbf{G}_{\mathcal{F}}(\mathbb{F}_q)$ est le groupe des points sur $\mathbb{F}_q$ d'un sous-groupe parabolique de $\bar{\mathbf{Q}}'$ de $\mathbf{G}_{\mathcal{F}}$ et l'image de $K^0_{\mathcal{F}} \cap L(F)$ est le groupe des points sur $\mathbb{F}_q$ d'une composante de Levi $\mathbf{L}'$ de $\bar{\mathbf{Q}}'$. D'après le lemme 6 appliqué à $\mathcal{F}'$ et au groupe L', on peut fixer $n \in Norm_{L'(F)}(A) \cap K^\nu_{\mathcal{F}'}$. A fortiori $n \in K^\nu_{\mathcal{F}}$. Notons $\mathbf{n}$ l'image de n dans $\mathbf{G}^\nu_{\mathcal{F}}$. L'image w de n dans W appartient à $W^{L'}$. La compatibilité des actions de n et de $\mathbf{n}$ entraîne alors que la conjugaison par $\mathbf{n}$ conserve $\bar{\mathbf{Q}}'$ et $\mathbf{L}'$. Alors $\bar{\mathbf{Q}}'^\nu = \mathbf{n}\bar{\mathbf{Q}}'$ est un sous-espace parabolique de $\mathbf{G}^\nu_{\mathcal{F}}$ d'espace de Levi $\mathbf{L}'^\nu = \mathbf{n}\mathbf{L}'$. Introduisons le sous-tore $\mathbf{A}$ de $\mathbf{G}_{\mathcal{F}}$ comme en 4(8) et (9). Identifions $\mathcal{A}$ à $X_*(\mathbf{A}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. Au groupe $\mathbf{L}'$ et à l'espace $\mathbf{L}'^\nu$ correspondent des sous-espaces $\mathcal{A}_{\mathbf{L}'}$ et $\mathcal{A}^\nu_{\mathbf{L}'}$. Ce dernier n'est autre que le sous-espace des points fixes de w agissant dans le premier. Or, puisque $L' = M_{\mathcal{F},\nu} \cap L$, $\mathcal{A}_{\mathbf{L}'}$ contient le sous-espace $\mathcal{A}_{L'}$. Puisque $w \in W^{L'}$, il agit trivialement sur cet espace donc $\mathcal{A}^\nu_{\mathbf{L}'}$ contient lui aussi $\mathcal{A}_{L'}$. Puisque L' ne contient pas $M_{\mathcal{F},\nu}$, cela entraîne $\mathcal{A}^\nu_{\mathbf{L}'} \neq \mathcal{A}^\nu_{\mathcal{F}}$. Donc $\mathbf{L}'^\nu$ est un sous-espace de Levi propre de $\mathbf{G}^\nu_{\mathcal{F}}$. En considérant les fonctions $\phi_{\mathcal{F},\nu,cusp}$ et $\phi_{\mathcal{F},\nu,cusp,\bar{Q}'}$ comme des fonctions sur $\mathbf{G}^\nu_{\mathcal{F}}(\mathbb{F}_q)$ et $\mathbf{L}'^\nu(\mathbb{F}_q)$, on voit que $\phi_{\mathcal{F},\nu,cusp,\bar{Q}'}$ est égale à $res^{\mathbf{G}^\nu_{\mathcal{F}}}_{\mathbf{L}'^\nu}(\phi_{\mathcal{F},\nu,cusp})$, à une constante non nulle près provenant des choix de mesures. Mais $\phi_{\mathcal{F},\nu,cusp}$ est cuspidale et le sous-espace $\mathbf{L}'^\nu$ est propre. Donc $\phi_{\mathcal{F},\nu,cusp,\bar{Q}'} = 0$. Alors l'égalité (8) démontre le (i) de l'énoncé. $\square$

Considérons le cas où M contient $M_{\mathcal{F},\nu}$. On projette l'appartement $App(A)$ sur $App^M(A)$. Comme dans la preuve du (ii), on peut construire un segment $[x_\star, x]$ et des facettes $\mathcal{F}'_\star$ et $\mathcal{F}'$. Comme dans cette preuve, on obtient la décomposition

$$K^0_\star \cap K^0_{\mathcal{F}} = (K^+_{\mathcal{F}} \cap U_{\bar{P}}(F))(K^0_\star \cap K^0_{\mathcal{F}} \cap M(F))(K^0_\star \cap U_P(F))$$

et l'égalité

$$K^0_\star \cap K^0_{\mathcal{F}} \cap M(F) = K^0_{\mathcal{F}'_\star} \cap K^0_{\mathcal{F}'} \cap M(F).$$

Les facettes $\mathcal{F}_\star$, $\mathcal{F}'_\star$, $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{F}$ se projettent dans des facettes $\mathcal{F}_\star^M$, $\mathcal{F}_\star'^M$, $\mathcal{F}'^M$ et $\mathcal{F}^M$ de $App^M(A)$. Notons $x_\star^M$ et x^M les projections de $x_\star$ et x. Ces points et les facettes précédentes sont dans la même situation que $x_\star$, x et les facettes $\mathcal{F}_\star$, $\mathcal{F}'_\star$, $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{F}$. C'est-à-dire que $x_\star^M \in \mathcal{F}_\star^M$, $x^M \in \mathcal{F}^M$, les facettes $\mathcal{F}_\star'^M$ et $\mathcal{F}'^M$ coupent le segment $[x_\star^M, x^M]$ selon des ensembles ouverts, $x_\star^M$ est adhérent à $\mathcal{F}_\star'^M$ et x^M est adhérent à $\mathcal{F}'^M$. Il en résulte que

$$K^0_{\mathcal{F}_\star'^M} \cap K^0_{\mathcal{F}'^M} = K_\star^{M,0} \cap K^0_{\mathcal{F}^M},$$

où on a posé $K_\star^{M,0} = K^0_{\mathcal{F}_\star^M}$. Or M contient $M_{\mathcal{F}'_\star}$ et $M_{\mathcal{F}'}$. D'après le lemme 6, on a donc $K^0_{\mathcal{F}_\star'^M} = K^0_{\mathcal{F}'_\star} \cap M(F)$ et $K^0_{\mathcal{F}'^M} = K^0_{\mathcal{F}'} \cap M(F)$. Toutes ces relations conduisent à l'égalité

$$K_\star^0 \cap K_{\mathcal{F}}^0 \cap M(F) = K_\star^{M,0} \cap K^0_{\mathcal{F}^M}$$

et la décomposition ci-dessus devient

$$K_\star^0 \cap K_{\mathcal{F}}^0 = (K_{\mathcal{F}}^+ \cap U_{\bar{P}}(F))(K_\star^{M,0} \cap K^0_{\mathcal{F}^M})(K_\star^0 \cap U_P(F)).$$

On peut appliquer les mêmes constructions en remplaçant la facette $\mathcal{F}_\star$ par $\mathcal{F}_{\star\star}$ (a priori, il pourrait être nécessaire d'accroître N, ce qui serait sans conséquence, mais on vérifie que ce n'est pas même nécessaire). D'où

$$(9) \qquad K_{\star\star}^0 \cap K_{\mathcal{F}}^0 = (K_{\mathcal{F}}^+ \cap U_{\bar{P}}(F))(K_{\star\star}^{M,0} \cap K^0_{\mathcal{F}^M})(K_{\star\star}^0 \cap U_P(F)).$$

16 Un résultat d'annulation

Fixons N tel que le lemme précédent soit vérifié pour tout $P \in \mathcal{F}(M_{min})$. Pour tout tel P et pour tout $f \in C_c(K_\star^\dagger/H)$, définissons

$$B_{N,R}(P,f) = \sum_{(\mathcal{F},\nu)\in Fac^*(G;A);\mathcal{F}\subset X_N(P)} mes(K_{\star\star}^0 \cap K_{\mathcal{F}}^0)^{-1} z_R(\mathcal{F},\nu) \int_{K_{\mathcal{F}}^\nu} f_{\star\star}(k)\phi_{\mathcal{F},\nu,cusp}(k)\, dk.$$

D'après 15(1), la formule 13(4) se récrit

$$(1) \qquad trace\, \pi(f) = \sum_{P\in\mathcal{F}(M_{min})} B_{N,R}(P,f)$$

pourvu que R soit assez grand.

Fixons P et notons M sa composante de Levi contenant M_{min}. D'après le (ii) du lemme 15, ne contribuent à $B_{N,R}(P,f)$ que des éléments $(\mathcal{F},\nu)$ tels que M contient $M_{\mathcal{F},\nu}$. Notons $Y_N(P)$ l'ensemble des $(\mathcal{F},\nu) \in Fac^*(G;A)$ tels que $\mathcal{F} \subset X_N(P)$ et M contient $M_{\mathcal{F},\nu}$. Pour $(\mathcal{F},\nu) \in Y_N(P)$, le lemme 15(i) calcule l'intégrale intervenant dans $B_{N,R}(P,f)$. La relation 15(9) conduit à l'égalité

$$mes(K_{\star\star}^0 \cap K_{\mathcal{F}}^0)^{-1} mes(K_{\mathcal{F}}^+ \cap U_{\bar{P}}(F)) = mes(K_{\star\star}^0 \cap U_P(F))^{-1} mes(K_{\star\star}^{M,0} \cap K^0_{\mathcal{F}^M})^{-1}.$$

Ainsi

$$B_{N,R}(P,f) = mes(K_{\star\star}^0 \cap U_P(F))^{-1} \sum_{(\mathcal{F},\nu)\in Y_N(P)} mes(K_{\star\star}^{M,0} \cap K^0_{\mathcal{F}^M})^{-1} z_R(\mathcal{F},\nu)$$

$$\int_{K^{\nu}_{\mathcal{F}^M}} f_{\star\star,[P]}(k)\phi_{\mathcal{F}^M,\nu,cusp}(k)\,dk.$$

Pour tout $(\mathcal{F}_M,\nu)\in Fac^*(M;A)_{G-comp}$, notons $Y_N(P,\mathcal{F}_M,\nu)$ l'ensemble des $\mathcal{F}\in Fac(G;A)$ telles que $(\mathcal{F},\nu)\in Y_N(P)$ et $\mathcal{F}^M=\mathcal{F}_M$. La formule ci-dessus se récrit

$$(2)\qquad B_{N,R}(P,f)=mes(K^0_{\star\star}\cap U_P(F))^{-1}\sum_{(\mathcal{F}_M,\nu)\in Fac^*(M;A)_{G-comp}} mes(K^{M,0}_{\star\star}\cap K^0_{\mathcal{F}_M})^{-1}z_{N,R}(P,\mathcal{F}_M,\nu)$$

$$\int_{K^{\nu}_{\mathcal{F}^M}} f_{\star\star,[P]}(k)\phi_{\mathcal{F}_M,\nu,cusp}(k)\,dk,$$

où

$$(3)\qquad z_{N,R}(P,\mathcal{F}_M,\nu)=\sum_{\mathcal{F}\in Y_N(P,\mathcal{F}_M,\nu)} z_R(\mathcal{F},\nu).$$

De même que l'on a défini les sous-ensembles $X'_N(Q)$ et $X_N(Q)$ de $App(A)$ pour $Q\in\mathcal{F}(M_{min})$, on définit les sous-ensembles $X'^M(Q)$ et $X^M(Q)$ de $App^M(A)$ pour $Q\in\mathcal{F}^M(M_{min})$. Notons B_M la boule dans $\mathcal{A}_M$ de centre 0 et de rayon 1. Le sous-groupe parabolique P définit une chambre C_P dans $\mathcal{A}_M$.

Proposition. *Si R est assez grand relativement à N, les propriétés suivantes sont vérifiées pour tout $(\mathcal{F}_M,\nu)\in Fac^*(M;A)_{G-comp}$:*

(i) si $\mathcal{F}_M$ est contenu dans $X^M_N(M)$ et $\mathcal{F}^{\nu}_M$ est réduit à un point, $z_{N,R}(P,\mathcal{F}_M,\nu)=mes(B_M\cap C_P)mes(B_M)^{-1}$;

(ii) sinon, $z_{N,R}(P,\mathcal{F}_M,\nu)=0$.

Preuve. D'après la définition (3) ci-dessus et celle de $z_R(\mathcal{F},\nu)$ donnée en 13, on a

$$z_{N,R}(P,\mathcal{F}_M,\nu)=\sum_{\mathcal{F}\in Y_N(P,\mathcal{F}_M,\nu)}\sum_{\mathcal{F}_1\in E_R(\mathcal{F},\nu)}(-1)^{dim(\mathcal{F}_1^{\nu})}z(\mathcal{F}_1,\mathcal{F},\nu).$$

Pour simplifier la notation, on change $\mathcal{F}$ en $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{F}_1$ en $\mathcal{F}$. En se rappelant les définitions, on obtient

$$(4)\qquad z_{N,R}(P,\mathcal{F}_M,\nu)=\sum_{\mathcal{F}\subset B_R(A);\nu\in\mathcal{N}(\mathcal{F})}(-1)^{dim(\mathcal{F}^{\nu})}\sum_{\mathcal{F}'\in Y_N(P,\mathcal{F}_M,\mathcal{F},\nu)} z(\mathcal{F},\mathcal{F}',\nu),$$

où on rappelle que $B_R(A)=B_R\cap App(A)$ et où on a noté $Y_N(P,\mathcal{F}_M,\mathcal{F},\nu)$ l'ensemble des $\mathcal{F}'\in Y_N(P,\mathcal{F}_M,\nu)$ telles que $\mathcal{F}\subset\bar{\mathcal{F}}'$. Plus explicitement, $Y_N(P,\mathcal{F}_M,\mathcal{F},\nu)$ est l'ensemble des facettes $\mathcal{F}'\in Fac(G;A)$ telles que $\nu\in\mathcal{N}(\mathcal{F}')$, $\mathcal{F}'\subset X_N(P)$, M contient $M_{\mathcal{F}',\nu}$, $\mathcal{F}'^M=\mathcal{F}_M$ et $\mathcal{F}\subset\bar{\mathcal{F}}'$.

Notons Ψ l'ensemble des facettes $\mathcal{F}\in Fac(G;A)$ qui coupent l'ensemble $p_M^{-1}(\bar{\mathcal{F}}^{\nu}_M)$. D'après le lemme 7(i), pour toute $\mathcal{F}\in\Psi$, on a $\nu\in\mathcal{N}(\mathcal{F})$ et $\mathcal{F}^{\nu}=\mathcal{F}\cap p_M^{-1}(\bar{\mathcal{F}}^{\nu}_M)$. L'ensemble $p_M^{-1}(\bar{\mathcal{F}}^{\nu}_M)$ est réunion disjointe des $\mathcal{F}^{\nu}$ pour $\mathcal{F}\in\Psi$ et cette décomposition est une décomposition en facettes qui sont toutes des polysimplexes comme on l'a vu au paragraphe 5. Notons Ψ_R l'ensemble des $\mathcal{F}\in\Psi$ telles que $\mathcal{F}\subset B_R(A)$. Puisque B_R est une réunion de facettes, pour $\mathcal{F}\in Fac(G;A)$, on a $\mathcal{F}\in\Psi_R$ si et seulement si $\mathcal{F}$ coupe l'ensemble $p_M^{-1}(\bar{\mathcal{F}}^{\nu}_M)\cap B_R(A)$. L'ensemble $p_M^{-1}(\bar{\mathcal{F}}^{\nu}_M)\cap B_R(A)$ est réunion disjointe des $\mathcal{F}^{\nu}$ pour $\mathcal{F}\in\Psi_R$.

Considérons une facette $\mathcal{F} \in Fac(G;A)$ telle que $\nu \in \mathcal{N}(\mathcal{F})$ et que l'ensemble $Y_N(P,\mathcal{F}_M,\mathcal{F},\nu)$ ne soit pas vide. Pour $\mathcal{F}' \in Y_N(P,\mathcal{F}_M,\mathcal{F},\nu)$, on a $\mathcal{F}'^\nu = \mathcal{F}' \cap p_M^{-1}(\mathcal{F}_M^\nu)$ d'après le lemme 6, donc $\bar{\mathcal{F}}'^\nu \subset p_M^{-1}(\bar{\mathcal{F}}_M^\nu)$. Les conditions $\nu \in \mathcal{N}(\mathcal{F})$ et $\mathcal{F} \subset \bar{\mathcal{F}}'$ entraînent $\mathcal{F}^\nu \subset \bar{\mathcal{F}}'^\nu$ d'après 5(2). Donc $\mathcal{F} \in \Psi$. Si de plus $\mathcal{F} \subset B_R(A)$, on a $\mathcal{F} \in \Psi_R$. Dans l'expression (4), on peut donc remplacer l'ensemble de sommation en $\mathcal{F}$ par Ψ_R.

Considérons $\mathcal{F} \in \Psi_R$ et $\mathcal{F}' \in Y_N(P,\mathcal{F}_M,\mathcal{F},\nu)$. Les conditions $\nu \in \mathcal{N}(\mathcal{F}')$, M contient $M_{\mathcal{F}',\nu}$ et $\mathcal{F}'^M = \mathcal{F}_M$ entraînent $\mathcal{A}_{\mathcal{F}'}^\nu = \mathcal{A}_{\mathcal{F}_M}^\nu$ d'après le lemme 6. Rappelons qu'en posant $L = M_{\mathcal{F}_M,\nu}$, cet espace n'est autre que $\mathcal{A}_L$ comme on l'a vu au paragraphe 5. Au paragraphe 13, on a défini une chambre $C_{\mathcal{F}'}^{\mathcal{F},\nu}$ dans cet espace. Elle est définie par des inégalités $\alpha(x) > 0$ pour un certain ensemble de $\alpha \in \Sigma - \Sigma^L$. Il est bien connu que les annulateurs dans $\mathcal{A}_L$ des racines dans $\Sigma - \Sigma^L$ découpent cet espace en chambres (minimales) associées aux sous-groupes paraboliques de composantes de Levi L. Pour tout tel sous-groupe Q, notons C_Q la chambre associée. Alors la chambre $C_{\mathcal{F}'}^{\mathcal{F},\nu}$ est réunion disjointe d'un certain nombre de chambres C_Q et de sous-variétés fermées de mesures nulles. Rappelons que $z(\mathcal{F},\mathcal{F}',\nu) = mes(B_L \cap C_{\mathcal{F}'}^{\mathcal{F},\nu})mes(B_L)^{-1}$ où B_L est la boule dans $\mathcal{A}_L$ de centre 0 et de rayon 1. On a donc

$$z(\mathcal{F},\mathcal{F}',\nu) = \sum_Q mes(B_L \cap C_Q)mes(B_L)^{-1},$$

où Q parcourt les éléments de $\mathcal{P}(L)$ tels que $C_Q \subset C_{\mathcal{F}'}^{\mathcal{F},\nu}$. Inversement, partons de $\mathcal{F} \in \Psi_R$ et d'un sous-groupe parabolique $Q \in \mathcal{P}(L)$. Il y a au plus une facette $\mathcal{F}' \in Y_N(P,\mathcal{F}_M,\mathcal{F},\nu)$ telle que C_Q soit contenue dans $C_{\mathcal{F}'}^{\mathcal{F},\nu}$. En effet, posons $\underline{L} = M_{\mathcal{F},\nu}$ et identifions $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}^\nu$ à $\mathcal{A}_{\underline{L}}$. La condition $\mathcal{F}^\nu \subset p_M^{-1}(\bar{\mathcal{F}}_M^\nu)$ entraîne que $L \subset \underline{L}$. La chambre $C_{\mathcal{F}'}^{\mathcal{F},\nu}$ associée à une facette $\mathcal{F}' \in Y_N(P,\mathcal{F}_M,\mathcal{F},\nu)$ est déterminée par un sous-groupe parabolique $Q^{\underline{L}} \in \mathcal{P}^{\underline{L}}(L)$. La condition $C_Q \subset C_{\mathcal{F}'}^{\mathcal{F},\nu}$ équivaut à ce que $Q \cap \underline{L} = Q^{\underline{L}}$. Plus concrètement, fixons un élément $\rho_Q \in C_Q$ en position générale. Il existe une unique facette telle que, pour $x \in \mathcal{F}^\nu$, il existe $\epsilon > 0$ tel que le segment $]x, x+\epsilon\rho_Q]$ soit contenu dans cette facette. Notons-la $\mathcal{F}[Q]$. Alors l'ensemble des $\mathcal{F}' \in Y_N(P,\mathcal{F}_M,\mathcal{F},\nu)$ telles que C_Q soit contenue dans $C_{\mathcal{F}'}^{\mathcal{F},\nu}$ est soit vide, soit réduit à cette unique facette $\mathcal{F}[Q]$. Notons $\Psi_R[Q]$ l'ensemble des $\mathcal{F} \in \Psi_R$ telles que $\mathcal{F}[Q]$ appartient à $Y_N(P,\mathcal{F}_M,\mathcal{F},\nu)$. L'expression (4) se récrit

$$(5) \qquad z_{N,R}(P,\mathcal{F}_M,\nu) = \sum_{Q \in \mathcal{P}(L)} mes(B_L \cap C_Q)mes(B_L)^{-1} Z_{N,R}[Q],$$

où

$$Z_{N,R}[Q] = \sum_{\mathcal{F} \in \Psi_R[Q]} (-1)^{dim(\mathcal{F}^\nu)}.$$

Fixons $Q \in \mathcal{P}(L)$ et $\mathcal{F} \in \Psi_R$. Montrons que

(6) $\mathcal{F} \in \Psi_R[Q]$ si et seulement si pour $x \in \mathcal{F}^\nu$, il existe $\epsilon > 0$ de sorte que le segment $]x, x+\epsilon\rho_Q]$ soit contenu dans $p_M^{-1}(\bar{\mathcal{F}}_M^\nu)$ et dans $X_N(P)$.

En effet, ce segment est contenu dans $\mathcal{F}[Q]$. Si $\mathcal{F} \in \Psi_R[Q]$, on a $\mathcal{F}[Q] \in Y_N(P,\mathcal{F}_M,\mathcal{F},\nu)$. Donc $\mathcal{F}[Q] \subset X_N(P)$ et le segment lui-même est inclus dans $X_N(P)$. D'autre part, $\mathcal{F}[Q] \subset p_M^{-1}(\mathcal{F}_M)$, donc $]x, x+\epsilon\rho_Q]$ est inclus dans cet ensemble. Sa projection $]p_M(x), p_M(x)+\epsilon p_M(\rho_Q)]$ est incluse dans $\mathcal{F}_M$ mais aussi dans $p_M(x) + \mathcal{A}_L/\mathcal{A}_M$ puisque $\rho_Q \in \mathcal{A}_L$. Or, puisque $\mathcal{A}_L = \mathcal{A}_{M_{\mathcal{F}_M,\nu}}$ et que $p_M(x)$ appartient à $\bar{\mathcal{F}}_M^\nu$, l'intersection de $\mathcal{F}$ et de cet espace affine est égale à $\mathcal{F}_M^\nu$. Donc $]x, x+\epsilon\rho_Q]$ est contenu dans $p_M^{-1}(\bar{\mathcal{F}}_M^\nu)$. Inversement, supposons la conclusion de (6) vérifiée. Alors la facette $\mathcal{F}[Q]$ contenant notre segment coupe $p_M^{-1}(\bar{\mathcal{F}}_M^\nu)$. Parce que l'on suppose ρ_Q en position générale, la facette $\mathcal{F}[Q]$ coupe cet ensemble selon un ouvert. D'après le (ii) du lemme 7, cela entraîne que $\nu \in \mathcal{N}(\mathcal{F}[Q])$, M contient $M_{\mathcal{F}[Q],\nu}$ et $\mathcal{F}[Q]^M = \mathcal{F}_M$. Il est clair par construction que x appartient à $\bar{\mathcal{F}}[Q]$, donc $\mathcal{F}$ tout entière est contenue dans $\bar{\mathcal{F}}[Q]$. Enfin $\mathcal{F}[Q]$ coupe $X_N(P)$ et est donc incluse dans cet ensemble. Toutes les conditions sont vérifiées pour que $\mathcal{F}[Q]$ appartienne à $Y_N(P, \mathcal{F}_M, \mathcal{F}, \nu)$, autrement dit pour que $\mathcal{F}$ appartienne à $\Psi_R[Q]$. Cela prouve (6).

Pour Q et $\mathcal{F}$ comme ci-dessus, étudions la condition : $]x, x + \epsilon\rho_Q]$ est contenu dans $p_M^{-1}(\bar{\mathcal{F}}_M^\nu)$, ce qui équivaut à ce que le segment fermé $[x, x + \epsilon\rho_Q]$ soit contenu dans le même ensemble. En posant $x^M = p_M(x)$ et $\rho_Q^M = p_M(\rho_Q)$, la condition équivaut à ce que $[x^M, x^M + \epsilon\rho_Q^M]$ soit contenu dans $\bar{\mathcal{F}}_M^\nu$. Remarquons que x^M appartient à la facette $\mathcal{F}^M$ qui contient $p_M(\mathcal{F})$, plus précisément x^M appartient au sous-ensemble $\mathcal{F}^{M,\nu}$ qui est une facette de $\bar{\mathcal{F}}_M^\nu$. Supposons d'abord que Σ^M est un système de racines irréductible et utilisons la description de l'ensemble $\bar{\mathcal{F}}_M^\nu$ donnée au paragraphe 5. On y supprime les exposants ν pour simplifier la notation. L'ensemble $\bar{\mathcal{F}}_M^\nu$ est l'enveloppe convexe d'une famille de points $(s_i)_{i\in I}$. Le point x^M appartient à la facette $\mathcal{F}^{M,\nu}$ de cette enveloppe, à laquelle est associé un sous-ensemble non vide $I_{\mathcal{F}^{M,\nu}} \subset I$. En fixant un point $s \in \bar{\mathcal{F}}_M^\nu$, on peut écrire $x^M - s = \sum_{i\in I} a_i(s_i - s)$ avec des $a_i > 0$ pour $i \in I_{\mathcal{F}^{M,\nu}}$, $a_i = 0$ pour $i \in I - I_{\mathcal{F}^{M,\nu}}$ et $\sum_{i\in I} a_i = 1$. Tout élément de $\mathcal{A}_L/\mathcal{A}_M$ peut s'écrire de façon unique $\sum_{i\in I} \lambda_i(s_i - s)$ avec des réels λ_i tels que $\sum_{i\in I} \lambda_i = 0$. En particulier, on peut écrire ainsi $\rho_Q^M = \sum_{i\in I} \lambda_i(s_i - s)$. Supposons d'abord $|I| \geq 2$. Parce que ρ_Q est en position générale, on a $\lambda_i \neq 0$ pour tout $i \in I$. Notons I_Q l'ensemble des $i \in I$ tels que $\lambda_i < 0$. Cet ensemble est non vide puisque la somme des λ_i est nulle. Remarquons que, pour la même raison, on a $I_Q \neq I$. On a $x^M + \epsilon\rho_Q^M - s = \sum_{i\in I}(a_i + \epsilon\lambda_i)(s_i - s)$. La condition pour que $x^M + \epsilon\rho_Q$ appartienne à l'enveloppe convexe de la famille $(s_i)_{i\in I}$ pour ϵ assez petit est donc que $a_i > 0$ quand $\lambda_i < 0$. Autrement dit $I_Q \subset I_{\mathcal{F}^{M,\nu}}$. Si maintenant I n'a qu'un élément, forcément égal à s, on a $x^M = s$ et $\rho_Q^M = 0$. Donc le segment $[x^M, x^M + \epsilon\rho_Q^M]$ est réduit au point x^M et est inclus dans $\bar{\mathcal{F}}_M^\nu$. En posant formellement $I_Q = I$, le résultat est le même que dans le cas $|I| \geq 2$. Il est facile d'étendre ces résultats au cas général où Σ^M n'est plus supposé irréductible. On décompose Σ^M en $\Sigma_1^M \times ... \times \Sigma_k^M$ où les Σ_l^M sont irréductibles. Soit $l \in \{1, ..., k\}$. A $\mathcal{F}_M^\nu$, resp. $\mathcal{F}$, resp. ρ_Q, est associé une famille de points $(s_{i,l})_{i\in I_l}$, resp. un sous-ensemble non vide $I_{\mathcal{F}^{M,\nu},l} \subset I_l$, resp. un sous-ensemble non vide $I_{Q,l} \subset I_l$. On note I, resp. $I_{\mathcal{F}^{M,\nu}}$, I_Q, la réunion disjointe des I_l, resp. $I_{\mathcal{F}^{M,\nu},l}$, $I_{Q,l}$. Alors

(7) $]x, x + \epsilon\rho_Q]$ est contenu dans $p_M^{-1}(\bar{\mathcal{F}}_M^\nu)$ si et seulement si $I_Q \subset I_{\mathcal{F}^{M,\nu}}$.

On conserve Q et $\mathcal{F}$ et on suppose que le segment $]x, x + \epsilon\rho_Q]$ est contenu dans $p_M^{-1}(\bar{\mathcal{F}}_M^\nu)$. On a déjà remarqué que, parce que l'on suppose ρ_Q en position générale, cela entraîne qu'il est en fait contenu dans $p_M^{-1}(\mathcal{F}_M^\nu)$. Etudions la seconde condition : $]x, x + \epsilon\rho_Q]$ est contenu dans $X_N(P)$. Montrons d'abord

(8) si $\mathcal{F}_M$ n'est pas contenue dans $X_N^M(M)$, $]x, x+\epsilon\rho_Q]$ n'est pas contenu dans $X_N(P)$.

Si $\mathcal{F}_M$ n'est pas contenue dans $X_N^M(M)$, on peut fixer un sous-groupe parabolique $P_1^M \in \mathcal{F}^M(M_{min})$ tel que $P_1^M \neq M$ et $\mathcal{F}_M$ est contenue dans $X_N'^M(P_1^M)$. Notons P_1 le sous-groupe parabolique contenu dans P et tel que $P_1 \cap M = P_1^M$. Supposons que notre segment soit inclus dans $X_N(P)$. Soit y un point du segment et soit $\alpha \in \Sigma(U_{P_1}) = \Sigma(U_P) \cup \Sigma^M(U_{P_1^M})$. Si $\alpha \in \Sigma(U_P)$, on a $\alpha(y) > N$ par définition de $X_N(P)$. Si $\alpha \in \Sigma(U_{P_1^M})$, on a aussi $\alpha(y) > N$ parce que $p_M(y) \in \mathcal{F}$ et que $\mathcal{F}$ est contenu dans $X_N'^N(P_1^M)$. Cela prouve que y appartient à $X'_N(P_1)$. Parce que $P_1 \subsetneq P$, cela contredit l'hypothèse que y appartient à $X_N(P)$. On a prouvé (8).

Supposons que $\mathcal{F}_M$ est contenue dans $X_N^M(M)$. On peut fixer un sous-groupe parabolique minimal $P_{min}^M \in \mathcal{P}^M(M_{min})$ de M de sorte que $\bar{\mathcal{F}}_M$ soit contenue dans l'adhérence de la chambre positive associée à ce parabolique. Autrement dit, en notant Δ^M la base de Σ^M associée à P_{min}, on a $\alpha(y) \geq 0$ pour tout $\alpha \in \Delta^M$ et tout $y \in \bar{\mathcal{F}}_M$. On note P_{min} l'unique sous-groupe parabolique contenu dans P et tel que $P_{min} \cap M = P_{min}^M$. On note Δ la base de Σ associée à P_{min}. Soit $y \in p_M^{-1}(\mathcal{F}_M)$. Alors

(9) la condition $y \in X_N(P)$ équivaut à $\alpha(y) > N$ pour tout $\alpha \in \Delta - \Delta^M$.

En effet, la condition $y \in X_N(P)$ implique ces relations parce que $\Delta - \Delta^M$ est contenu dans $\Sigma(U_P)$. Inversement, supposons ces relations vérifiées. Toute racine $\alpha \in \Sigma(U_P)$ est somme à coefficients positifs ou nuls d'éléments de Δ et au moins un élément de $\Delta - \Delta^M$ intervient avec un coefficient strictement positif. Puisque $\beta(y) \geq 0$ pour tout $\beta \in \Delta$, cela entraîne $\alpha(y) > N$. Donc $y \in X'_N(P)$. Si y n'appartenait pas à $X_N(P)$, il y aurait un sous-groupe parabolique P_1 strictement contenu dans P tel que $y \in X_N(P_1)$. Alors $p_M(y)$ appartiendrait à $X_N^M(P_1 \cap M)$. Puisque $P_1 \cap M$ est un sous-groupe parabolique propre de M, on aurait $y \notin X_N^M(M)$, contrairement à l'hypothèse sur $\mathcal{F}_M$. Cela prouve (9).

Remarquons qu'une racine $\alpha \in \Delta - \Delta^M$ n'est pas constante sur $p_M^{-1}(\bar{\mathcal{F}}_M^\nu)$. Puisque ρ_Q est en position générale, on a donc $\alpha(\rho_Q) \neq 0$. Notons $\Delta_P[Q]$ l'ensemble des $\alpha \in \Delta - \Delta^M$ tels que $\alpha(\rho_Q) < 0$. On déduit immédiatement de (9) que le segment $]x, x + \epsilon\rho_Q]$ est contenu dans $p_M^{-1}(\bar{\mathcal{F}}_M^\nu)$ pour $\epsilon > 0$ assez petit si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées

$\alpha(x) \geq N$ pour tout $\alpha \in \Delta - \Delta^M$;

$\alpha(x) > N$ pour tout $\alpha \in \Delta_P[Q]$.

Notons $\Delta_{P,N}(\mathcal{F})$ l'ensemble des $\alpha \in \Delta - \Delta^M$ telles que $\alpha(x) = N$ (il ne dépend que de $\mathcal{F}$, pas du choix de x). Si la première condition ci-dessus est vérifiée, la seconde équivaut à $\Delta_{P,N}(\mathcal{F}) \cap \Delta_P[Q] = \emptyset$. Autrement dit

(10) le segment $]x, x + \epsilon\rho_Q]$ est contenu dans $p_M^{-1}(\bar{\mathcal{F}}_M^\nu)$ pour $\epsilon > 0$ assez petit si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées

$\alpha(x) \geq N$ pour tout $\alpha \in \Delta - \Delta^M$;

$\Delta_{P,N}(\mathcal{F}) \cap \Delta_P[Q] = \emptyset$.

Il résulte de (6) et (8) que, si $\mathcal{F}_M$ n'est pas contenue dans $X_N^M(M)$, alors $\Psi_R[Q]$ est vide. Donc $Z_{N,R}[Q] = 0$. Cela étant vrai pour tout Q, on a $z_{N,R}(P, \mathcal{F}_M, \nu) = 0$, ce qui démontre une partie du (ii) de l'énoncé. On suppose désormais que $\mathcal{F}_M$ est contenue dans $X_N^M(M)$. Notons $\Psi_{R,N}$ l'ensemble des facettes $\mathcal{F} \in \Psi_R$ telles que, pour $x \in \mathcal{F}$, on a $\alpha(x) \geq N$ pour tout $\alpha \in \Delta - \Delta^M$ (avec la définition ci-dessus de Δ, qui ne dépend pas de Q). Il résulte de (6), (7) et (10) que $\Psi_R[Q]$ est l'ensemble des $\mathcal{F} \in \Psi_{R,N}$ telles que

$I_Q \subset I_{\mathcal{F}^{M,\nu}}$;

$\Delta_{P,N}(\mathcal{F}) \cap \Delta_P[Q] = \emptyset$.

Chacune de ces conditions est ouverte car, en passant de $\mathcal{F}$ à une facette de son adhérence, $I_{\mathcal{F}^{M,\nu}}$ diminue tandis que $\Delta_{P,N}(\mathcal{F})$ augmente. On va les convertir en conditions fermées. On remarque que, pour $\mathcal{F} \in \Psi_{R,N}$, on a

$$\sum_{J \subset I_Q; J \cap I_{\mathcal{F}^{M,\nu}} = \emptyset} (-1)^{|J|} = \begin{cases} 1, & \text{si } \; I_Q \subset I_{\mathcal{F}^{M,\nu}}, \\ 0, & \text{sinon} ; \end{cases}$$

$$\sum_{D \subset \Delta_{P,N}(\mathcal{F}) \cap \Delta_P[Q]} (-1)^{|D|} = \begin{cases} 1, & \text{si } \; \Delta_{P,N}(\mathcal{F}) \cap \Delta_P[Q] = \emptyset, \\ 0, & \text{sinon} ; \end{cases}$$

Pour des sous-ensembles $J \subset I_Q$ et $D \subset \Delta_P[Q]$, notons $\Psi_{R,N}[J,D]$ l'ensemble des $\mathcal{F} \in \Psi_{R,N}$ telles que $J \cap I_{\mathcal{F}^{M,\nu}} = \emptyset$ et $D \subset \Delta_{P,N}(\mathcal{F})$. Alors la fonction caractéristique de $\Psi_R[Q]$ est la somme des fonctions caractéristiques des $\Psi_{R,N}[J,D]$ affectées du coefficient $(-1)^{|J|+|D|}$. D'où

$$(11) \qquad Z_{N,R}[Q] = \sum_{J \subset I_Q} \sum_{D \subset \Delta_P[Q]} (-1)^{|J|+|D|} Z_{N,R}[J,D],$$

où

$$Z_{N,R}[J,D] = \sum_{\mathcal{F} \in \Psi_{R,N}[J,D]} (-1)^{dim(\mathcal{F}^\nu)}.$$

Fixons J et D. Il résulte des définitions que $\Psi_{R,N}[J,D]$ est l'ensemble des $\mathcal{F} \in \Psi$ telles que $\mathcal{F}^\nu$ soit contenue dans un certain sous-ensemble $E[J,D]$ de $p_M^{-1}(\bar{\mathcal{F}}_M^\nu)$. Précisément, c'est l'ensemble des $x \in App(A)$ tels que

(12)(a) $x \in p_M^{-1}(\bar{F}_M^\nu)$;

(12)(b) $x \in B_R(A)$;

(12)(c) $p_M(x)$ appartient à une facette $\mathcal{F}_M'^\nu$ de $\bar{\mathcal{F}}_M^\nu$ dont l'ensemble de points associés $I_{\mathcal{F}'^\nu}$ est disjoint de J ;

(12)(d) $\alpha(x) = N$ pour $\alpha \in D$ tandis que $\alpha(x) \geq N$ pour $\alpha \in \Delta - \Delta^M$ et $\alpha \notin D$.

Cet ensemble est fermé et est réunion de facettes $\mathcal{F}^\nu$. Le nombre $Z_{N,R}[J,D]$ apparaît comme la caractéristique d'Euler-Poincaré de $E[J,D]$. Avec les notations introduites plus haut, posons $J_l = I_l \cap J$ pour tout $l = 1,...,k$. On a $J = \bigcup_{l=1,...,k} J_l$. Pour toute facette $\mathcal{F}_M'^\nu$ de $\bar{\mathcal{F}}_M^\nu$, on a de même $I_{\mathcal{F}_M'^\nu} = \bigcup_{l=1,...,k} I_{\mathcal{F}_M'^\nu,l}$ et chaque ensemble $I_{\mathcal{F}_M'^\nu,l}$ est non vide. Un tel ensemble ne peut être disjoint de J_l que si $J_l \neq I_l$. S'il existe l tel que $J_l = I_l$, l'ensemble $E[J,D]$ est donc vide et $Z_{R,N}[J,D] = 0$. Notons $\mathcal{J}$ l'ensemble des sous-ensembles $J \subset I_Q$ tels que $J_l \neq I_l$ pour tout $l = 1,...,k$. Supposons maintenant $J \in \mathcal{J}$. L'ensemble $I - J$ définit alors une facette de $\bar{\mathcal{F}}_M^\nu$. Fixons un point $y^M[J]$ de cette facette. Puisque les éléments de $\Delta - \Delta^M$ se restreignent en des formes linéaires sur $\mathcal{A}_M$ qui sont linéairement indépendantes, on peut fixer un point $y[J,D] \in App(A)$ tel que $p_M(y[J,D]) = y^M[J]$ et $\alpha(y[J,D]) = N$ pour $\alpha \in \Delta - \Delta^M$. Ce point $y[J,D]$ vérifie toutes les conditions pour appartenir à $E[J,D]$, sauf peut-être la condition $y[J,D] \in B_R(A)$. Mais, N étant fixé, les données sous-jacentes intervenant sont en nombre fini. C'est clair pour les données P et Q. Puisqu'on a supposé $\mathcal{F}_M \subset X_N^M(M)$, il n'y a qu'un nombre fini de telles facettes. L'ensemble des ν peut être infini mais $\mathcal{F}_M^\nu$ ne dépend en fait que de l'image de ν modulo le groupe $w_G(Z(G)(F))$ et ces images sont en nombre fini. Enfin, J et D sont en nombre fini. On n'a donc qu'un nombre fini de points $y[J,D]$. Si R est assez grand, tous ces points appartiennnent à $B_R(A)$. Supposons qu'il en soit ainsi. Alors $y[J,D] \in E[J,D]$ et cet ensemble n'est pas vide. Montrons que

(13) $E[J,D]$ est convexe.

Les conditions (12)(a) et (12)(d) définissent évidemment des convexes. Il en est de même de (12)(b) car on a imposé à $B_R(A)$ d'être convexe. On vérifie que, pour deux facettes $\mathcal{F}_M'^\nu$ et $\mathcal{F}_M''^\nu$ de $\bar{\mathcal{F}}_M^\nu$, un point appartenant à un segment joignant un point de la première à un point de la seconde appartient à une facette $\mathcal{F}_{M,1}^\nu$ telle que $I_{\mathcal{F}_{M,1}^\nu} \subset I_{\mathcal{F}_M'^\nu} \cup I_{\mathcal{F}_M''^\nu}$. Donc (12)(c) définit aussi un convexe. Cela démontre (13).

Puisque $E[J,D]$ est un convexe non vide, sa caractéristique d'Euler-Poincaré vaut 1, c'est-à-dire $Z_{N,R}[J,D] = 1$. On obtient

$$Z_{N,R}[Q] = \sum_{J \in \mathcal{J}} \sum_{D \subset \Delta_P[Q]} (-1)^{|J|+|D|}.$$

La somme en D vaut 1 si $\Delta_P[Q]=\emptyset$ et 0 sinon. La somme en J se décompose en produit sur $l=1,...,k$ de sommes

$$\sum_{J_l\subset I_{Q,l},J_l\neq I_l}(-1)^{|J_l|}.$$

Fixons l. Si I_l n'a qu'un élément, alors $I_{Q,l}=I_l$ et le seul terme J_l intervenant est l'ensemble vide. La somme ci-dessus vaut 1. Si I_l a au moins 2 éléments, $I_{Q,l}$ est un sous-ensemble non vide de I_l et on a remarqué plus haut qu'il n'était pas égal à I_l tout entier. La condition $J_l\neq I_l$ est donc inutile dans la définition ci-dessus et la somme est nulle. On obtient que $Z_{R,N}[Q]$ vaut 1 si $\Delta_P[Q]=\emptyset$ et $|I_l|=1$ pour tout l et vaut 0 sinon. La deuxième condition équivaut à ce que $\mathcal{F}_M^\nu$ soit réduit à un point. Si elle est vérifiée, on a $M_{\mathcal{F}_M,\nu}=M$, c'est-à-dire $L=M$. Donc Q et P sont deux sous-groupes paraboliques de même composante de Levi. Puisque ρ_Q est un point général de la chambre associée à Q, la condition $\Delta_P[Q]=\emptyset$ équivaut alors à $Q=P$. Donc $Z_{R,N}[Q]=1$ si $\mathcal{F}_M^\nu$ est réduit à un point et $Q=P$ tandis que $Z_{R,N}[Q]=0$ sinon. La relation (5) entraîne alors que $z_{N,R}(P,\mathcal{F}_M,\nu)$ vaut $mes(B_M\cap C_P)mes(B_M)^{-1}$ si $\mathcal{F}_M^\nu$ est réduit à un point et 0 sinon. Cela achève la démonstration. $\square$

17 Démonstration du théorème 12

Pour $f\in C_c(K_\star^\dagger/H)$ et $P\in\mathcal{F}(M_{min})$, on a défini en 16 le terme $B_{N,R}(P,f)$. La proposition de ce paragraphe convertit la formule 16(2) en

$$B_{N,R}(P,f)=mes(B_M\cap C_P)mes(B_M)^{-1}mes(K_{\star\star}^0\cap U_P(F))^{-1}$$

$$\sum_{(\mathcal{F}_M,\nu)\in Fac_{max}^*(M;A)_{G-comp},\mathcal{F}_M\subset X_N^M(M)}mes(K_{\star\star}^{M,0}\cap K_{\mathcal{F}_M}^0)^{-1}\int_{K_{\mathcal{F}_M}^\nu}f_{\star\star,[P]}(k)\phi_{\mathcal{F}_M,\nu,cusp}(k)\,dk.$$

Cela vaut pourvu que R soit assez grand relativement à N. Le lemme 11 s'applique à M. Il montre que, si N est assez grand, l'intégrale ci-dessus est nulle pour un élément $(\mathcal{F}_M,\nu)\in Fac_{max}^*(M;A)_{G-comp}$ tel que $\mathcal{F}_M$ n'est pas inclus dans $X_N^M(M)$. En choisissant N assez grand (puis R assez grand), on peut supprimer la condition $\mathcal{F}_M\subset X_N^M(M)$ dans la formule ci-dessus. On obtient une expression qui ne dépend plus de N et que l'on note simplement $B(P,f)$. Posons $h=f_{\star\star,[P]}$. En imitant la définition de 14, on définit une fonction $h_{\star\star}$ sur $M(F)$ par

$$h_{\star\star}(m)=\int_{K_{\star\star}^{M,0}}h(x^{-1}mx)\,dx.$$

Mais il est clair que h est par construction invariante par conjugaison par $K_{\star\star}^{M,0}$. Donc $h_{\star\star}=mes(K_{\star\star}^{M,0})h$. Alors

$$B(P,f)=mes(B_M\cap C_P)mes(B_M)^{-1}mes(K_{\star\star}^0\cap U_P(F))^{-1}mes(K_{\star\star}^{M,0})^{-1}$$

$$\sum_{(\mathcal{F}_M,\nu)\in Fac_{max}^*(M;A)_{G-comp}}mes(K_{\star\star}^{M,0}\cap K_{\mathcal{F}_M}^0)^{-1}\int_{K_{\mathcal{F}_M}^\nu}h_{\star\star}(k)\phi_{\mathcal{F}_M,\nu,cusp}(k)\,dk$$

$$=mes(B_M\cap C_P)mes(B_M)^{-1}mes(K_{\star\star}^0\cap P(F))^{-1}$$

$$\sum_{(\mathcal{F}_M,\nu)\in Fac^*_{max}(M;A)_{G-comp}} mes(K^{M,0}_{\star\star}\cap K^0_{\mathcal{F}_M})^{-1}\int_{K^\nu_{\mathcal{F}_M}} h_{\star\star}(k)\phi_{\mathcal{F}_M,\nu,cusp}(k)\,dk$$

où la mesure sur $P(F)=M(F)U_P(F)$ est le produit des mesures sur $M(F)$ et sur $U_P(F)$. Le même calcul qui a permis de convertir la formule 14(3) en (4), mais en sens inverse, conduit à l'égalité

$$B(P,f)=mes(B_M\cap C_P)mes(B_M)^{-1}mes(K^0_{\star\star}\cap P(F))^{-1}$$

$$\sum_{(\mathcal{F}_M,\nu)\in Fac^*_{max}(M)_{G-comp}}\int_{K^\nu_{\mathcal{F}_M}} h(k)\phi_{\mathcal{F}_M,\nu,cusp}(k)\,dk.$$

Autrement dit, en utilisant les définitions,

$$B(P,f)=mes(B_M\cap C_P)mes(B_M)^{-1}mes(K^0_{\star\star}\cap P(F))^{-1}mes(K^{M,0}_{\star\star})^{-1}\Theta^M_{\pi,cusp}(f_{\star\star,[P]}).$$

Remarquons que cette expression est indépendante de la mesure fixée sur $P(F)$ puisque le dernier terme est proportionnel à cette mesure tandis que l'avant-dernier lui est inversement proportionnel. D'après 16(1), on a

$$trace\,\pi(f)=\sum_{P\in\mathcal{F}(M_{min})}B(P,f).$$

Pour tout $w\in W$, on peut remplacer ci-dessus P par $w^{-1}(P)$ puis moyenner en w. D'où

$$trace\,\pi(f)=|W|^{-1}\sum_{P\in\mathcal{F}(M_{min})}\sum_{w\in W}B(w^{-1}(P),f).$$

Fixons P et, pour tout $w\in W$, relevons w en un élément $n_w\in Norm_{G(F)}(A)$. Il est clair que $mes(B_{w^{-1}(M)}\cap C_{w^{-1}(P)})=mes(B_M\cap C_P)$ et que $mes(K^0_{\star\star}\cap w^{-1}(P)(F))=mes(n_wK^0_{\star\star}n_w^{-1}\cap P(F))$. En dévissant les définitions, on vérifie que

$$\Theta^{w^{-1}(M)}_{\pi,cusp}(f_{\star\star,[w^{-1}(P)]})=\Theta^M_{\pi,cusp}((^{n_w}(f_{\star\star}))_{[P]}).$$

D'où

$$B(w^{-1}(P),f)=mes(B_M\cap C_P)mes(B_M)^{-1}\Theta^M_{\pi,cusp}(f[w]_{[P]}),$$

où $f[w]=mes(n_wK^0_{\star\star}n_w^{-1}\cap P(F))^{-1\,n_w}(f_{\star\star})$. Par définition, pour $g\in G(F)$, on a

$$f[w](g)=mes(n_wK^0_{\star\star}n_w^{-1}\cap P(F))^{-1}\int_{K^0_{\star\star}} f(k^{-1}n_w^{-1}gn_wk)\,dk.$$

Des mesures sur $G(F)$ et sur $P(F)$ se déduit une mesure sur $P(F)\backslash G(F)$, cf. 11. On vérifie que, pour toute fonction φ sur $G(F)$ vérifiant $\varphi(mug)=\delta_P(m)\varphi(g)$ pour tous $m\in M(F)$, $u\in U_P(F)$ et $g\in G(F)$, on a l'égalité

$$\int_{P(F)\backslash P(F)n_wK^0_{\star\star}}\varphi(g)\,dg=mes(n_wK^0_{\star\star}n_w^{-1}\cap P(F))^{-1}\int_{K^0_{\star\star}}\varphi(n_wk)\,dk.$$

En conséquence,

$$\Theta^M_{\pi,cusp}(f[w]_{[P]})=\int_{P(F)\backslash P(F)n_wK^0_{\star\star}}\Theta^M_{\pi,cusp}((^gf)_{[P]})\,dg.$$

La réunion des ensembles $P(F)\backslash P(F)n_w K^0_{\star\star}$ quand w décrit W est $P(F)\backslash G(F)$ tout entier. Les ensembles associés à w et w' sont disjoints ou confondus. Ils sont confondus si et seulement si $w \in W^M w'$. On obtient que

$$\sum_{w\in W} \Theta^M_{\pi,cusp}(f[w]_{[P]}) = |W^M| \int_{P(F)\backslash G(F)} \Theta^M_{\pi,cusp}((^g f)_{[P]})\, dg = |W^M| ind^G_M(\Theta^M_{\pi,cusp})(f).$$

Puis

$$\sum_{w\in W} B(w^{-1}(P), f) = |W^M| mes(B_M \cap C_P) mes(B_M)^{-1} ind^G_M(\Theta^M_{\pi,cusp})(f),$$

et

$$trace\, \pi(f) = |W|^{-1} \sum_{P\in\mathcal{F}(M_{min})} |W^M| mes(B_M \cap C_P) mes(B_M)^{-1} ind^G_M(\Theta^M_{\pi,cusp})(f),$$

où, comme ci-dessus, M désigne la composante de Levi de P contenant M_{min}. On peut décomposer la somme en P en une somme sur $M \in \mathcal{L}(M_{min})$ puis une somme sur $P \in \mathcal{P}(M)$. Pour M fixé, la somme des $mes(B_M \cap C_P) mes(B_M)^{-1}$ quand P décrit $\mathcal{P}(M)$ vaut 1 puisque les chambres C_P sont disjointes et que l'adhérence de leur réunion est $\mathcal{A}_M$ tout entier. D'où

$$trace\, \pi(f) = \sum_{M\in\mathcal{L}(M_{min})} |W^M||W|^{-1} ind^G_M(\Theta^M_{\pi,cusp})(f).$$

Cela démontre le théorème 12 pour une fonction $f \in C_c(K^\dagger_\star/H)$. Puisqu'on peut choisir des groupes H vérifiant les conditions imposées en 14 et aussi petits que l'on veut, le résultat vaut pour toute fonction $f \in C^\infty_c(G(F))$ à support dans $K^\dagger_\star$. Puisque $\mathcal{F}_\star$ était une facette quelconque dans $App(A)$ et que toutes les distributions ci-dessus sont invariantes par conjugaison, le résultat vaut pour toute fonction $f \in C^\infty_c(G(F))$ telle qu'il existe une facette $\mathcal{F} \in Fac(G)$ de sorte que le support de f soit contenu dans $K^\dagger_{\mathcal{F}}$. Considérons maintenant une fonction $f \in C^\infty_c(G(F))$ dont le support est formé d'éléments compacts modulo $Z(G)$. Chacun de ces éléments est contenu dans $K^\dagger_{\mathcal{F}}$ pour une certaine facette $\mathcal{F}$. Puisque le support de f est compact et que les ensembles $K^\dagger_{\mathcal{F}}$ sont ouverts, une partition de l'unité permet d'écrire f comme une combinaison linéaire finie de fonctions f' pour lesquelles il existe une facette $\mathcal{F}'$ de sorte que f' soit à support dans $K^\dagger_{\mathcal{F}'}$. L'égalité ci-dessus vaut pour ces fonctions f', donc aussi pour f. Cela achève la preuve du théorème 12.

18 Expression du caractère à l'aide d'intégrales orbitales pondérées

On sait que la distribution Θ_π est localement intégrable, plus précisément, elle est associée à une fonction θ_π sur $G(F)$ qui est localement intégrable sur $G(F)$ et localement constante sur le sous-ensemble des éléments semi-simples fortement réguliers. La formule de Weyl permet d'écrire

$$(1) \qquad \Theta_\pi(f) = \sum_{M\in\mathcal{L}(M_{min})} |W^M||W^G|^{-1} \int_{M(F)_{ell}} f_{P_M}(m)\theta_\pi(m) D^G(m)^{1/2} dm$$

pour toute $f \in C_c^\infty(G(F))$, où, pour tout M, P_M est un élément quelconque de $\mathcal{P}(M)$.

En utilisant les formules 9(1) et 11(1), on a l'égalité

$$\Theta_{\pi,cusp}(f) = \sum_{(\mathcal{F},\nu)\in \underline{Fac}^*_{max}(G)} mes(A_G(F)\backslash K_{\mathcal{F}}^\dagger)^{-1} \sum_{M\in\mathcal{L}(M_{min})} |W^M||W^G|^{-1}(-1)^{dim(A_M)-dim(A_G)}$$

$$\int_{M(F)_{ell}} f_{P_M}(m) J_M^G(m, \phi_{\mathcal{F},\nu,cusp})\, dm.$$

Pour $L \in \mathcal{L}(M_{min})$, on a une formule similaire pour la distribution $\Theta^L_{\pi,cusp}$. Pour $M \subset L$ deux sous-groupes de Levi contenant M_{min}, pour $P \subset Q$ deux sous-groupes paraboliques de composantes de Levi M, resp. L, on a l'égalité $(f_Q)_{P\cap L} = f_P$ pour tout $f \in C_c^\infty(G(F))$. On en déduit

$$ind_L^G(\Theta^L_{\pi,cusp})(f) = \sum_{(\mathcal{F}_L,\nu)\in \underline{Fac}^*_{max}(L)_{G-comp}} mes(A_L(F)\backslash K_{\mathcal{F}_L}^\dagger)^{-1} \sum_{M\in\mathcal{L}^L(M_{min})} |W^M||W^L|^{-1}$$

$$(-1)^{dim(A_M)-dim(A_L)} \int_{M(F)_{ell}} f_{P_M}(m) J_M^L(m, \phi_{\mathcal{F}_L,\nu,cusp})\, dm$$

pour toute $f \in C_c^\infty(G(F))$. Donc

$$(2) \qquad \sum_{L\in\mathcal{L}(M_{min})} |W^L||W^G|^{-1} ind_L^G(\Theta^L_{\pi,cusp})(f) = \sum_{M\in\mathcal{L}^L(M_{min})} |W^M||W^L|^{-1}$$

$$\int_{M(F)_{ell}} f_{P_M}(m)\theta^M_{\pi,comp}(m) D^G(m)^{1/2}\, dm,$$

où, pour $M \in \mathcal{L}(M_{min})$ et $m \in M(F)_{ell}$, on a posé

$$\theta^M_{\pi,comp}(m) = D^G(m)^{-1/2} \sum_{L\in\mathcal{L}(M)} (-1)^{dim(A_M)-dim(A_L)}$$

$$\sum_{(\mathcal{F}_L,\nu)\in \underline{Fac}^*_{max}(L)_{G-comp}} mes(A_L(F)\backslash K_{\mathcal{F}_L}^\dagger)^{-1} J_M^L(m, \phi_{\mathcal{F}_L,\nu,cusp}).$$

Le théorème 12 dit que les deux expressions (1) et (2) sont égales si f est à support compact modulo $Z(G)$. On en déduit le calcul suivant pour le caractère θ_π restreint aux éléments semi-simples fortement réguliers et compacts modulo $Z(G)$. Soit x un tel élément. Quitte à conjuguer x, on peut supposer qu'il existe $M \in \mathcal{L}(M_{min})$ de sorte que x appartienne à $M(F)$ et soit elliptique dans M. On a alors l'égalité

$$(3) \qquad \theta_\pi(x) = \theta^M_{\pi,comp}(x).$$

On peut interpréter la définition de la fonction $\theta^M_{\pi,comp}$ de la façon suivante. Fixons une fonction $\underline{P} : \mathcal{L}(M_{min}) \to \mathcal{F}(M_{min})$ telle que $\underline{P}(L) \in \mathcal{P}(L)$ pour tout $L \in \mathcal{L}(M_{min})$. Pour tout $M \in \mathcal{L}(M_{min})$, on définit une fonction $\theta^M_{\pi,\underline{P}}$ sur l'ensemble des éléments semi-simples fortement réguliers de $M(F)$ par

$$\theta^M_{\pi,\underline{P}}(m) = D^G(m)^{-1/2} \sum_{L\in\mathcal{L}(M)} (-1)^{dim(A_M)-dim(A_L)}$$

$$\sum_{(\mathcal{F}_L,\nu_L)\in\underline{Fac}^*_{max}(L)} mes(A_L(F)\backslash K^{\dagger}_{\mathcal{F}_L})^{-1}J^L_M(m,\phi_{\pi_{\underline{P}(L)},\mathcal{F}_L,\nu_L,cusp}).$$

On a :

(4) si m est compact modulo $Z(G)$, alors $\theta^M_{\pi,comp}(m)=\theta^M_{\pi,\underline{P}}(m)$.

La preuve est la même qu'en 11(2).

Soit $g\in G(F)$ un élément semi-simple et fortement régulier. D'après Casselman, cf. [7] paragraphe 2, on lui associe un sous-groupe parabolique Q_g de G et une composante de Levi L_g de P_g de la façon suivante. Notons T le sous-tore maximal de G contenant g. Plaçons-nous pour un instant sur une clôture algébrique $\bar{F}$ de F. Prolongeons la valeur absolue $|.|_F$ à $\bar{F}$. Notons Σ_T l'ensemble des racines de T dans G sur $\bar{F}$. On note Σ^1_T, resp. $\Sigma^<_T$, l'ensemble des $\alpha\in\Sigma_T$ telles que $|\alpha(g)|_F=1$, resp. $|\alpha(g)|<1$. Alors il existe un unique sous-groupe parabolique Q_g et une unique composante de Levi L_g de Q_g contenant T, définis tous deux sur $\bar{F}$, de sorte que Σ^1_T, resp. $\Sigma^<_T$, soit l'ensemble des racines de T dans L_g, resp. dans U_{Q_g}. On vérifie que ces deux groupes sont en fait définis sur F. L'élément $g\in M_g(F)$ est compact modulo $Z(M_g)$. Quitte à conjuguer g, on peut supposer qu'il existe $M\in\mathcal{L}(M_{min})$ de sorte que $g\in M(F)_{ell}$. Un tel élément est compact modulo $Z(M)$. Il en résulte aisément que $M\subset L_g$, a fortiori $L_g\in\mathcal{L}(M_{min})$. Casselman a prouvé que $\theta_\pi(g)=\delta_{P_g}(g)^{1/2}\theta_{\pi_{P_g}}(g)$, cf. [7] théorème 5.2. Ce dernier terme est calculé par la formule (3) où l'on remplace G et π par L_g et π_{P_g}. Cela démontre le théorème suivant.

Théorème. *Soit $M\in\mathcal{L}(M_{min})$ et soit $m\in M(F)_{ell}$. Alors on a l'égalité*

$$\theta_\pi(m)=\delta_{P_m}(m)^{1/2}\theta^M_{\pi_{Q_m},comp}(m).$$

Pour éviter les confusions, écrivons explicitement le terme apparaissant ci-dessus :

$$\theta^M_{\pi_{Q_m},comp}(m)=D^{L_m}(m)^{-1/2}\sum_{L\in\mathcal{L}^{L_m}(M)}(-1)^{dim(A_M)-dim(A_L)}$$

$$\sum_{(\mathcal{F}_L,\nu)\in\underline{Fac}^*_{max}(L)_{L_m-comp}} mes(A_L(F)\backslash K^{\dagger}_{\mathcal{F}_L})^{-1}J^L_M(m,\phi_{\pi_{Q_m},\mathcal{F}_L,\nu,cusp}).$$

De même qu'en (4), on peut reformuler la définition de $\theta^M_{\pi_{Q_m},comp}(m)$ de la façon suivante. Fixons une fonction $\underline{P}^{Q_m}:\mathcal{L}^{L_m}(M_{min})\to\mathcal{F}(M_{min})$ telle que, pour tout $L\in\mathcal{L}^{L_m}(M_{min})$, $\underline{P}^{Q_m}(L)\in\mathcal{P}(L)$ et $\underline{P}^{Q_m}(L)\subset Q_m$. On a alors

$$\theta^M_{\pi_{Q_m},comp}(m)=D^{L_m}(m)^{-1/2}\sum_{L\in\mathcal{L}^{M_m}(M)}(-1)^{dim(A_M)-dim(A_L)}$$

$$\sum_{(\mathcal{F}_L,\nu_L)\in\underline{Fac}^*_{max}(L)} mes(A_L(F)\backslash K^{\dagger}_{\mathcal{F}_L})^{-1}J^L_M(m,\phi_{\pi_{\underline{P}^{Q_m}(L)},\mathcal{F}_L,\nu_L,cusp}).$$

Références

[1] J. Arthur *The characters of supercuspidal representations as weighted orbital integrals,* Proc. Indian Acad. Sci. 97 (1987), p.3-19

[2] J. Arthur *On elliptic tempered characters,* Acta Math. 171 (1993), p.73-138

[3] J. Arthur *A local trace formula,* Publ. Math. de l'IHES 73 (1991), p.5-96

[4] R. Beuzart-Plessis *A local trace formula for the Gan-Gross-Prasad conjecture for unitary groups : the archimedean case,* prépublication (2016)

[5] F. Bruhat, J. Tits *Groupes réductifs sur un corps local : I. Données radicielles valuées,* Publ. Math. IHES 41 (1972), p.5-251

[6] F. Bruhat, J. Tits *Groupes réductifs sur un corps local : II. Schémas en groupes. Existence d'une donnée radicielle valuée,* Publ. Math. IHES 60 (1984), p.5-184

[7] W. Casselman *Characters and Jacquet modules,* Math. Annalen 230 (1977), p.101-105

[8] F. Courtès *Distributions invariantes sur les groupes réductifs quasi-déployés,* Canad. J. Math. 58 (2006), p.897-999

[9] T. Haines, M. Rapoport *On parahoric subgroups,* Adv. in Math. 219 (2008), p.188-198, appendice à G. Pappas, M. Rapoport *Twisted loop groups and their affine flag varieties,* Adv. in Math 219 (2008), p.118-198

[10] R. Kottwitz *Isocrystals with additional structure II,* Compositio Math. 109 (1997), p.255-339

[11] B. Lemaire *Sous-groupes parahoriques d'un groupe réductif p-adique et descente galoisienne ramifiée,* (2001) non publié

[12] R. Meyer, M. Solleveld *Resolutions for representations of reductive p-adic groups via their buildings,* J. für die r. und ang. Math. 647 (2010), p.115-150

[13] A. Moy, G. Prasad *Jacquet functors and unrefined minimal K-types,* Comment. Math. Helvetici 71 (1996), p.98-121

[14] P. Schneider, U. Stuhler *Representation theory and sheaves on the Bruhat-Tits building,* Publ. Math. de l'IHES 85 (1997), p.13-191

CNRS-Institut de Mathématiques de Jussieu
4 place Jussieu, 75005 Paris
jean-loup.waldspurger@imj-prg.fr